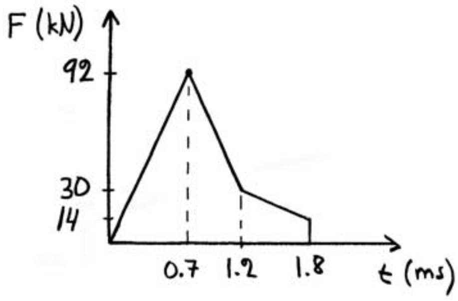
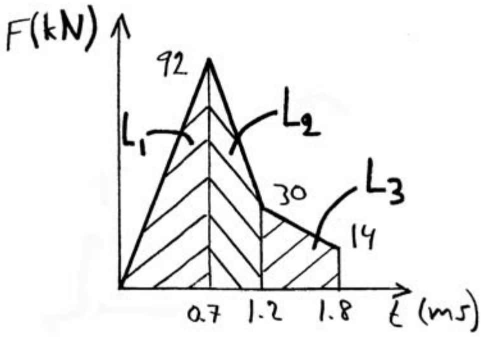
71)



Givet: $m = 0.13$ kg

Sökt: L och v_{mynning}



Impulsen L av F är enligt (4.2) tidsintegralen av F.

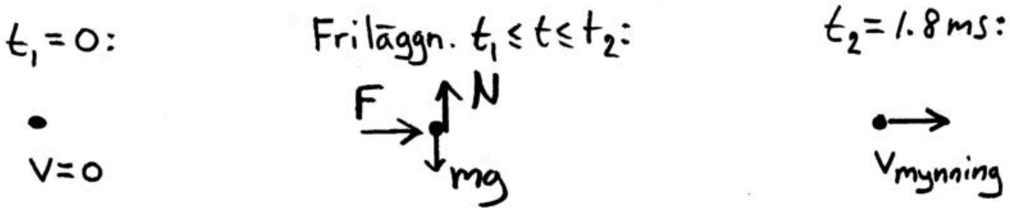
Grafen $\Rightarrow \quad L = L_1 + L_2 + L_3$

$$L_1 = \frac{92 \cdot 0.7}{2} = 32.2 \text{ Ns}$$

$$L_2 = \frac{(92+30)(1.2-0.7)}{2} = 30.5 \text{ Ns}$$

$$L_3 = \frac{(30+14)(1.8-1.2)}{2} = 13.2 \text{ Ns}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{L = 75.9 \text{ Ns}}}$$

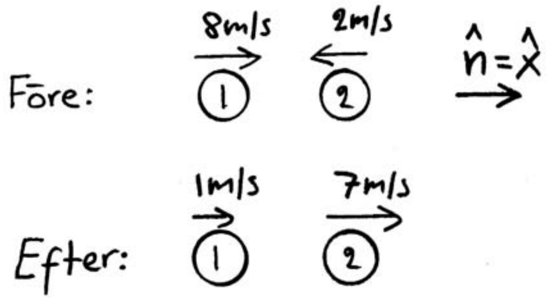


Impulslagen, (4.1), $\int_{t_1}^{t_2} \overline{F}\, dt \;=\; \overline{p}(t = t_2) \;-\; \overline{p}(t = t_1), \qquad \overline{p} = m\overline{v}$:

$\rightarrow$: $\quad L \;=\; m v_{\text{mynning}} \;-\; 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\underline{\underline{v_{\text{mynning}}}} \;=\; \frac{L}{m} \;=\; \underline{\underline{584 \text{ m/s}}}$$

72)



<u>Sökt:</u> e

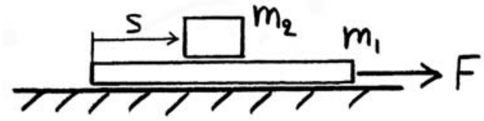
Vi kallar, helt godtyckligt, den vänstra kulan för 1 och den högra för 2. Vi definierar även, helt godtyckligt, stötnormalriktningen som $\hat{n} = +\hat{x}$.

$$e \overset{(5.27)}{=} \frac{v_{2,n}^{e} - v_{1,n}^{e}}{v_{1,n}^{f} - v_{2,n}^{f}}$$

Vi föredrar att använda det allmänna uttrycket för stöttalet i (5.27) framför uttrycket i (5.18) som bara gäller för en rak stöt (vilket vi i och för sig har här).

$$\therefore \quad \underline{\underline{e}} = \frac{7-1}{8-(-2)} = \underline{\underline{0.6}}$$

73)



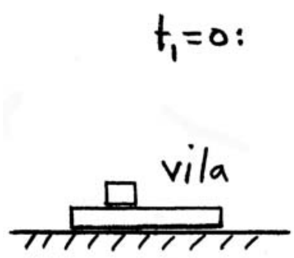
Givet: $t = 0$: vila

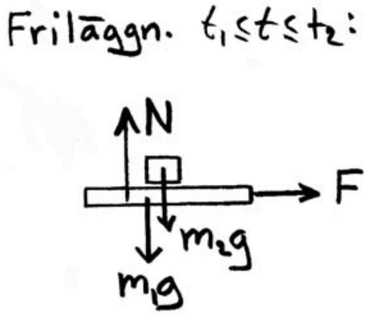
$t = t_*$: plankans hastighet v

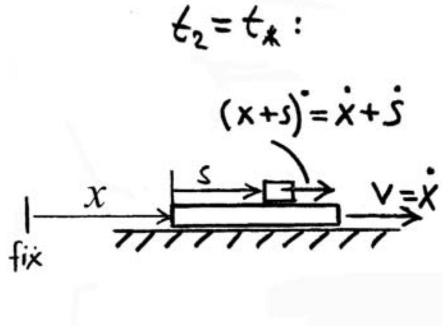
Sökt: $\dot{s}$

Impulslagen är lämplig eftersom vi söker en hastighet och har information om hur plankans hastighet ändras mellan två *tidpunkter* (det blir därmed betydligt lättare att bestämma impulsen än arbetet i arbete-energilagen).

Eftersom vi har ett system med två kroppar (vilka som alltid i kursen modelleras som masspunkter), är det lämpligt att börja med att teckna impulslagen för systemet av båda kropparna för att sedan, vid behov, även teckna den för de enskilda kropparna.







Hastigheterna i impulslagen mäts alltid i en fix referensram (inertialram). Plankans hastighet i en fix referensram är v, men det sökta $\dot{s}$ är klossens hastighet relativt plankan, inte hastigheten i en fix referensram. För att bestämma klossens hastighet i en fix referensram för vi in plankans läge x mätt från en fix punkt. Därmed är klossens läge mätt från en fix punkt $x + s$, så att klossens hastighet i en fix referensram är $(x+s)^{\cdot} = \dot{x} + \dot{s} = v + \dot{s}$.

$$\text{Impulslagen, (4.3),} \quad \int_{t_1}^{t_2} \overline{F}^{\text{ext}}\, dt = \sum_{i=1}^{2} \left(\overline{p}^i\right)_2 - \sum_{i=1}^{2} \left(\overline{p}^i\right)_1, \quad \overline{p}^i = m_i \overline{v}_i :$$

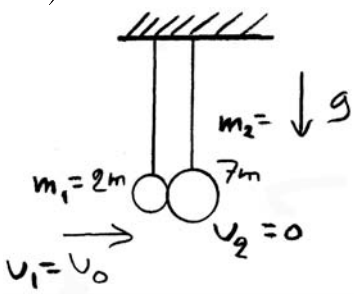
$$\rightarrow: \quad F t_* = m_1 v + m_2(v + \dot{s}) - (0 + 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{\dot{s} = \frac{F t_* - m_1 v}{m_2} - v,}} \ \rightarrow$$

Dimensionen ok!

(Hastigheten v som är given i uppgiften, beror så klart på friktionstalet mellan klossen och plankan.)

67)



Givet: Samma utslag efter stöt 1.

Sökt: e, energiförlust efter stöt 2

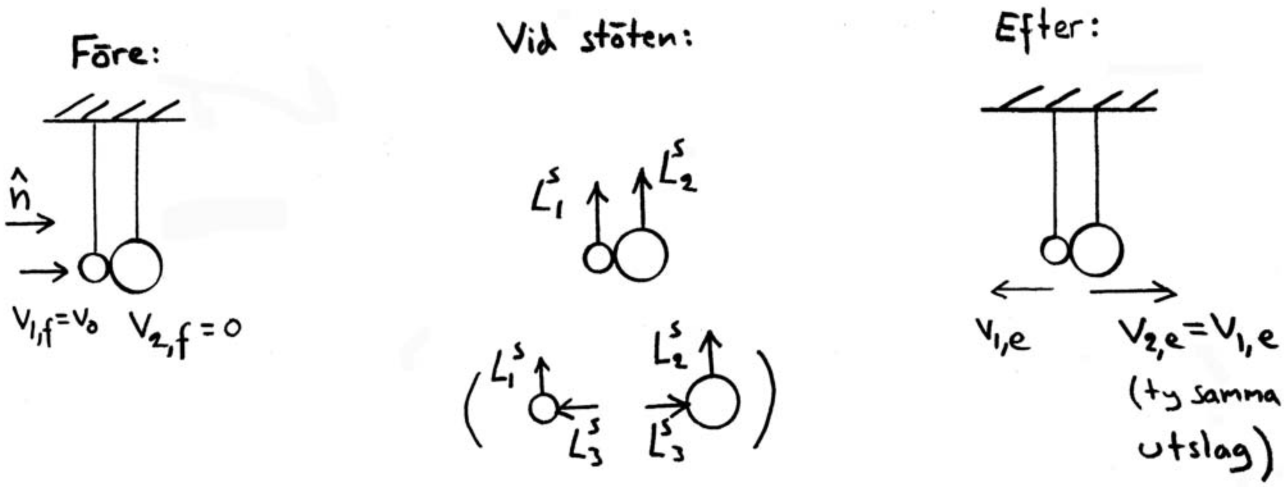
Man får en stötimpuls mellan kulorna, men den är en *inre* stötimpuls i det system som studeras. Den ingår alltså inte i den externa stötimpulsen $\overline{L}^{\text{s,ext}}$ i (5.15).

Ett snöre kan rent allmänt ta upp en stötimpuls (det kan ju rycka till i ett snöre). (Just här kommer dock snörstötimpulserna vara noll eftersom inga hastigheter ändras i vertikalled vid stöten.)

Tyngdkraftens impuls vid en momentan stöt är alltid noll, se sid. 109.

Studera båda kulorna som *ett* system.

Stöt 1:



Stötimpulslagen, (5.15), $\overline{L}^{\text{s,ext}} = \sum_{i=1}^{2} \overline{p}_e^i - \sum_{i=1}^{2} \overline{p}_f^i, \quad \overline{p}^i = m_i \overline{v}_i :$

$$\rightarrow: \quad 0 = -2mv_{1,e} + 7mv_{1,e} - (2mv_0 + 0) \quad \Leftrightarrow$$

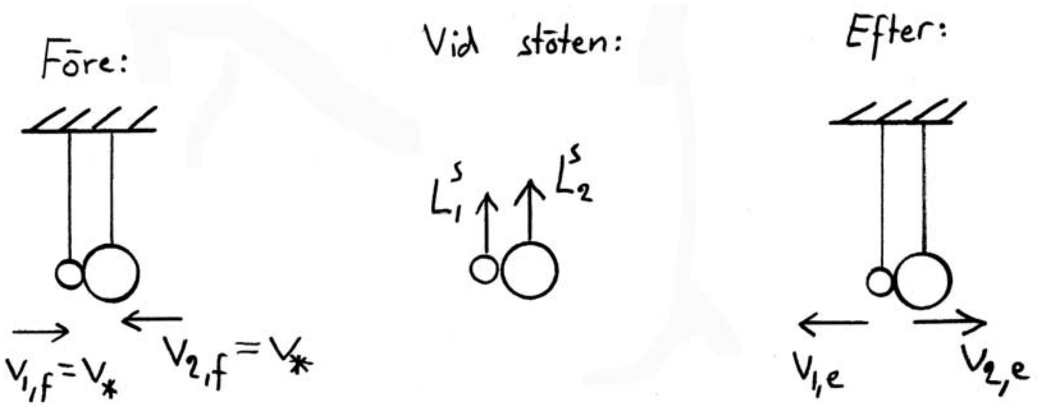
$$\underline{v_{1,e} = \frac{2v_0}{5} =: v_*} \qquad (1)$$

Stöttalet:

$$e \overset{(5.27)}{=} \frac{v_{2,e} - (-v_{1,e})}{v_0 - 0} = \frac{2\,\dfrac{2v_0}{5}}{v_0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{e = \frac{4}{5}}} \qquad (2)$$

<u>Stöt 2:</u>



Eftersom båda kulorna har farten $v_* = 2v_0/5$ direkt efter stöt 1, måste de även ha farten v_* precis före stöt 2.

Stötimpulslagen:

$$\rightarrow: \quad 0 = -2mv_{1,e} + 7mv_{2,e} - (2mv_* - 7mv_*) \qquad (3)$$

Stöttalet:

$$e \overset{(5.27)}{=} \frac{v_{2,e} - (-v_{1,e})}{v_* - (-v_*)} \overset{(2)}{=} \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow$$

$$v_{2,e} + v_{1,e} = \frac{8}{5}v_* \overset{(1)}{=} \frac{16}{25}v_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$v_{1,e} = -v_{2,e} + \frac{16}{25}v_0 \qquad (4)$$

Insättning i (3) $\Rightarrow$

$$0 = 2v_{2,e} - \frac{32}{25}v_0 + 7v_{2,e} + 5\,\frac{2}{5}v_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$v_{2,e} = -\frac{2}{25}v_0$$

$$v_{1,e} \overset{(4)}{=} \frac{18}{25}v_0$$

Energiförlust:

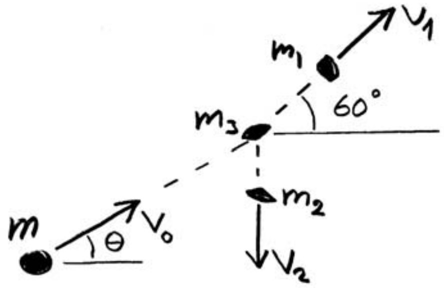
Läge 1: precis före stöt 1. Läge 2: precis efter stöt 2. Mellan dessa lägen ändras inte lägesenergin V_g. Det finns ingen fjäder, så den elastiska energin $V_e = 0$. Alltså måste förlusten i total mekanisk energi E enbart bestå av förlusten i rörelseenergi T ($E = T + V_g + V_e$).

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{\frac{2mv_0^2}{2} - \left(\frac{2m}{2}\left(\frac{18}{25}v_0\right)^2 + \frac{7m}{2}\left(-\frac{2}{25}v_0\right)^2\right)}{\frac{2mv_0^2}{2}} \cdot 100\% =$$

$$= \underline{\underline{\frac{287}{625} \cdot 100\% = 46\%}}$$

66)



Givet: $m_1 = m_2 = m_3 = m/3$

$v_3 = 0$

Sökt: v_1, v_2

Studera delarna som *ett system*:

Vi har två obekanta farter. De kan vi bestämma genom att teckna impulslagen för systemet av alla tre delar (i både x- och y-led).

Det verkar inga externa krafter på systemet eftersom kroppen sprängs av *interna* krafter, och det är givet att tyngdkraften kan försummas.

Impulslagen, (4.3), $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \overline{F}^{\text{ext}}\, dt = \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{p}^i\right)_2 - \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{p}^i\right)_1, \quad \overline{p}^i = m_i \overline{v}_i$:

$$\rightarrow: \quad 0 = \frac{m}{3} v_1 \cos 60° - m v_0 \cos\theta \qquad (1)$$

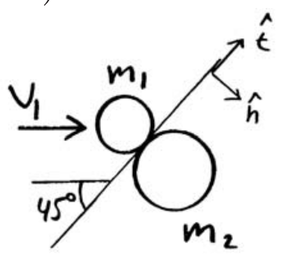
$$\uparrow: \quad 0 = \frac{m}{3} v_1 \sin 60° - \frac{m}{3} v_2 - m v_0 \sin\theta \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_1 = 6 v_0 \cos\theta}}$$

$$(2) \Rightarrow \quad 0 \;=\; 2v_0 \cos\theta \,\frac{\sqrt{3}}{2} \;-\; \frac{1}{3}\, v_2 \;-\; v_0 \sin\theta \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{v_2 \;=\; 3(\sqrt{3}\cos\theta \;-\; \sin\theta)v_0}}$$

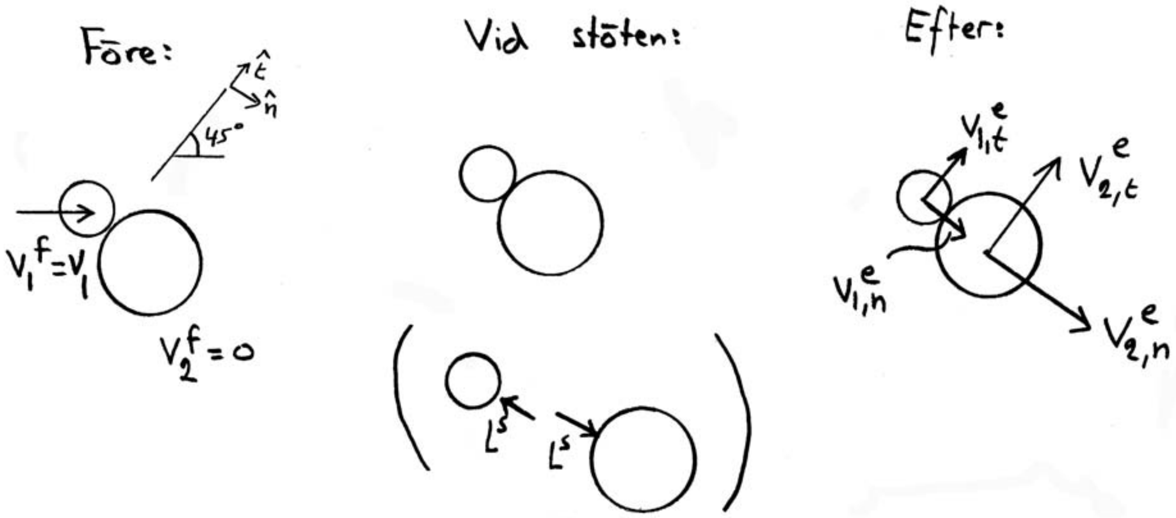
68)



<u>Givet:</u> e

<u>Sökt:</u> $\overline{v}_1^e$, $\overline{v}_2^e$

Studera kulorna som *ett* system:



Stötimpulslagen, (5.15), $\overline{L}^{\text{s,ext}} = \sum_{i=1}^{2} \overline{p}_e^i - \sum_{i=1}^{2} \overline{p}_f^i, \quad \overline{p}^i = m_i \overline{v}_i :$

Se sid. 114–115 för diskussion om val av lämpliga ekvationer.

$$\hat{n}: \quad 0 = m_1 v_{1,n}^e + m_2 v_{2,n}^e - \left(m_1 \frac{v_1}{\sqrt{2}} + 0 \right) \qquad (1)$$

Stötimpulslagen för 1 resp. 2:

$$\hat{t}: \quad 0 = m_1 v_{1,t}^e - m_1 \frac{v_1}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

$$\hat{t}: \quad 0 = m_2 v_{2,t}^e - 0 \qquad (3)$$

Stöttalet:

$$e \overset{(5.27)}{=} \frac{v_{2,n}^e - v_{1,n}^e}{v_{1,n}^f - v_{2,n}^f} = \frac{v_{2,n}^e - v_{1,n}^e}{\dfrac{v_1}{\sqrt{2}} - 0} \qquad (4)$$

$$(3) \Rightarrow \quad v_{2,t}^e = 0$$

$$(2) \Rightarrow \quad v_{1,t}^e = \frac{v_1}{\sqrt{2}}$$

$$(1) \Rightarrow \quad v_{2,n}^e = \frac{m_1 \dfrac{v_1}{\sqrt{2}} - m_1 v_{1,n}^e}{m_2} \qquad (5)$$

Insättning i (4) $\Rightarrow$

$$\frac{m_1 \dfrac{v_1}{\sqrt{2}} - m_1 v_{1,n}^e}{m_2} - v_{1,n}^e = e \frac{v_1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$v_{1,n}^e = \frac{\dfrac{m_1}{m_2} \dfrac{v_1}{\sqrt{2}} - e \dfrac{v_1}{\sqrt{2}}}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}} = \frac{v_1}{\sqrt{2}} \frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2}$$

$(5) \Rightarrow$

$$v_{2,n}^e = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_1}{\sqrt{2}} - \frac{m_1}{m_2} \frac{v_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2} \right) =$$

$$= \frac{m_1 + m_2 - m_1 + em_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1}{m_2} \frac{v_1}{\sqrt{2}} = \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} \frac{v_1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{\overline{v}_1^e = \frac{v_1}{\sqrt{2}} \left(\hat{t} + \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} \hat{n} \right)}}$$

$$\underline{\underline{\overline{v}_2^e = \frac{v_1}{\sqrt{2}} \frac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2} \hat{n}}}$$

Dimensionen ok!

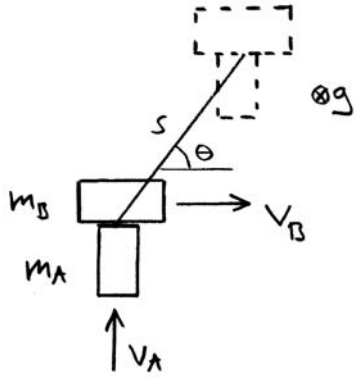
Ingen hastighet blir oändlig för någon kombination av $m_1 > 0$ och $m_2 > 0$ ok!

Kula 2 måste röra sig i enbart $\hat{n}$-led efter stöten eftersom den är i vila före stöten och inte påverkas av någon stötimpuls i $\hat{t}$-led.

Kula 1 har alltid en positiv hastighetskomponent i $\hat{t}$-led efter stöten eftersom den har det före stöten och inte påverkas av någon stötimpuls i $\hat{t}$-led.

Kula 1 studsar tillbaka i negativ $\hat{n}$-led om m_1 är liten i förhållande till m_2 ok!

69)



<u>Givet:</u> μ_k

Stoppsträcka s, θ

<u>Sökt:</u> $v_{\mathcal{A}}$, $v_{\mathcal{B}}$

<u>Stöten:</u>

Studera bilarna som *ett* system:

Stötimpulslagen, (5.15), $\overline{L}^{\text{s,ext}} = \sum_{i=1}^{2} \overline{p}_e^i - \sum_{i=1}^{2} \overline{p}_f^i, \quad \overline{p}^i = m_i \overline{v}_i$:

$$\rightarrow: \quad 0 = (m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}})\, v_e \cos\theta - m_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}} \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad 0 = (m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}})\, v_e \sin\theta - m_{\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}} \qquad (2)$$

Efter stöten:

Arbete–energilagen, (3.17):

Eftersom vi känner stoppsträckan, måste vi kunna räkna ut v_e m.h.a. arbete–energilagen.

$$U = \Delta T + \underbrace{\Delta V_g + \Delta V_e}_{0} \qquad (3)$$

Läge 1 (efter stöten):

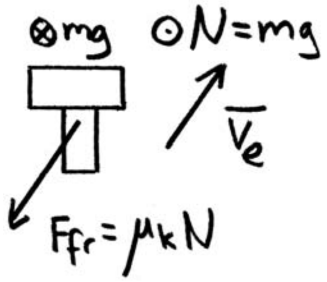
$$T_1 = \frac{m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}}}{2} v_e^2$$

Läge 2 (stannat):

$$T_2 = 0$$

U?

Friläg:



U är arbetet av $\overline{N}$ och $\overline{F}_{\text{fr}}$.

$\overline{N} \perp \overline{v} \quad \Rightarrow \quad \overline{N}$ arbetar inte.

$$\therefore \quad U = U_{\text{fr}} = -F_{\text{fr}} s = -\mu_k \underbrace{(m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}}) g}_{N} s$$

Arbetet är ”kraft gånger väg” enligt exempel 3.1 eftersom kraften är konstant till storlek och riktning. Eftersom friktionskraften är motriktad rörelseriktningen blir arbetet negativt.

Insättning i (3) $\Rightarrow$

$$-\mu_k(m_{\mathcal{A}}+m_{\mathcal{B}})g\,s \;=\; -\frac{m_{\mathcal{A}}+m_{\mathcal{B}}}{2}v_e^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$v_e \;=\; \sqrt{2\mu_k g s}$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{v_{\mathcal{B}} \;=\; \frac{(m_{\mathcal{A}}+m_{\mathcal{B}})\sqrt{2\mu_k g s}\cos\theta}{m_{\mathcal{B}}}}}$$

$$\underline{\underline{v_{\mathcal{A}} \;=\; \frac{(m_{\mathcal{A}}+m_{\mathcal{B}})\sqrt{2\mu_k g s}\sin\theta}{m_{\mathcal{A}}}}}$$

Dimensionen ok!

$s\uparrow \;\Rightarrow\; v\uparrow$ ok!

(Den givna stoppsträckan s beror så klart på μ_k.)

75)

<u>Givet:</u> $t = 0$: $v_{\text{kloss}} = v_0$, $v_{\text{kälke}} = 0$

<u>Sökt:</u> Gemensam fart v', stoppsträcka s_{stopp}.

Studera kälken och klossen som *ett* system:

Då klossen har stannat på kälken har båda kropparna hastigheten v'. Eftersom det inte verkar någon extern kraft i horisontell led på systemet, måste vi kunna få fram v' m.h.a. impulslagen.

Impulslagen, (4.3), $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \overline{F}^{\text{ext}}\, dt = \sum_{i=1}^{2} \left(\overline{p}^i\right)_2 - \sum_{i=1}^{2} \left(\overline{p}^i\right)_1 , \quad \overline{p}^i = m_i \overline{v}_i$:

$$\rightarrow: \quad 0 = m_1 v' + m_2 v' - (0 + m_2 v_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{v' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0}}$$

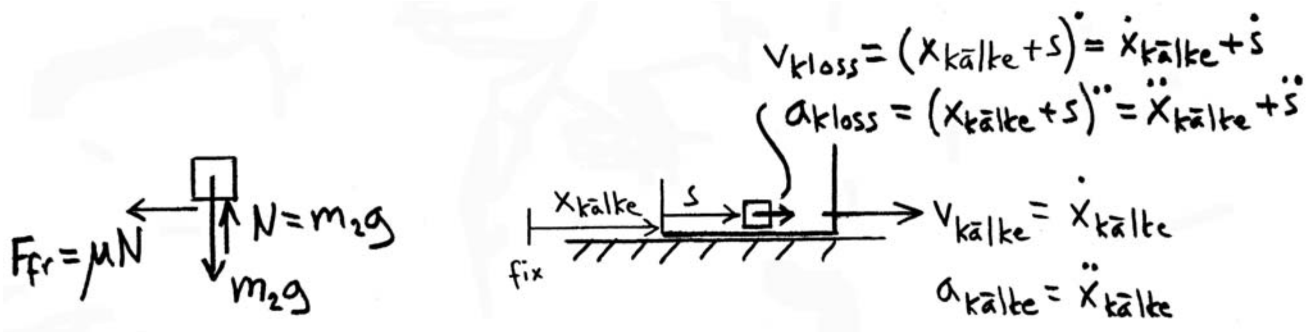
Dimensionen ok!

$v' < v_0$ ok, ty friktionen måste minska rörelseenergin!

För att bestämma stoppsträckan s_{stopp} kan vi t.ex. teckna arbete–energilagen. Men eftersom systemet har två frihetsgrader – klossen och kälken kan ju röra sig oberoende av varandra – kommer arbete–energilagen inte ensam ge oss tillräckligt med ekvationer, utan vi måste kombinera med Newton II för en av kropparna, se avsnitt 3.4.

Av den anledningen väljer vi här att inte använda arbete–energilagen, utan tecknar i stället Newton II för de två kropparna.

Frilägg klossen:



Friktionskraften på klossen är riktad åt vänster eftersom det är den som gör att klossens fart minskar.

Vi anger kälkens läge mätt från en fix punkt m.h.a. koordinaten $x_{\text{kälke}}$. Klossens läge från kälkens vänsterkant ges av koordinaten s. Klossens läge mätt från en fix punkt ges alltså av $x_{\text{kälke}} + s$.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

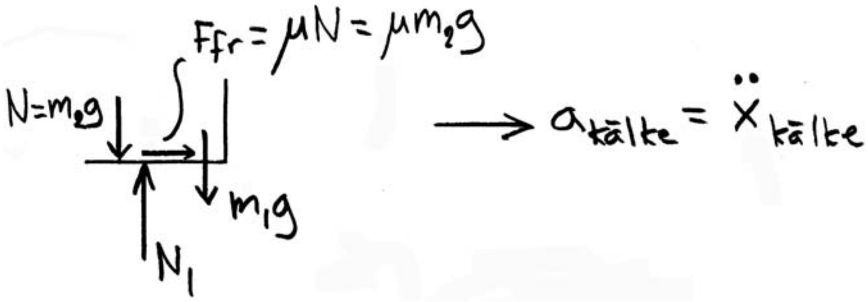
Klossens acceleration åt höger i en inertialram är därför $a_{\text{kloss}} = +(x_{\text{kälke}} + s)^{\cdot\cdot}$.

$$\longrightarrow: \quad -\mu m_2 g = m_2 a_{\text{kloss}} \quad \Leftrightarrow$$

$$a_{\text{kloss}} = \ddot{x}_{\text{kälke}} + \ddot{s} = -\mu g \qquad (1)$$

Frilägg kälken:

Vi anger kälkens läge mätt från en fix punkt m.h.a. koordinaten $x_{\text{kälke}}$. Kälkens acceleration åt höger i en inertialram är därför $a_{\text{kälke}} = +\ddot{x}_{\text{kälke}}$.



Friktionskraften på kälken är enligt Newton III, (2.8), lika stor som friktionskraften på klossen, men motriktad.

Newton II:

$$\longrightarrow: \quad \mu m_2 g = m_1 a_{\text{kälke}} \quad \Leftrightarrow$$

$$a_{\text{kälke}} = \ddot{x}_{\text{kälke}} = \mu g \frac{m_2}{m_1} \qquad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$

$$\ddot{s} = -\mu g\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)$$

Vi söker stoppsträckan s_{stopp} då klossen stannat på kälken, d.v.s. då $\dot{s} = 0$. Den kan vi få fram utan att blanda in stopptiden genom att använda Varignons sats $\ddot{s}\,ds = \dot{s}\,d\dot{s}$, helt analogt med (1.26).

Varignons sats:

$$\ddot{s}\,ds = \dot{s}\,d\dot{s} \quad \Rightarrow$$

$$-\mu g\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\int_0^{s_{\text{stopp}}} ds = \int_{v_0}^{0} \dot{s}\,d\dot{s} \quad \Leftrightarrow$$

Vid $s = 0$ är $v_{\text{kloss}} = \dot{x}_{\text{kälke}} + \dot{s} = v_0$. Eftersom $\dot{x}_{\text{kälke}} = 0$ då, gäller $\dot{s} = v_0$ när $s = 0$.

$$-\mu g\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)s_{\text{stopp}} = \left[\frac{1}{2}\dot{s}^2\right]_{v_0}^{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$s_{\text{stopp}} = \frac{v_0^2}{2\mu g\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)} = \frac{m_1 v_o^2}{2\mu g(m_1+m_2)}$$

Dimensionen ok!

$v_0 \uparrow \Rightarrow \; s_{\text{stopp}} \uparrow$ ok!

$\mu \uparrow \Rightarrow \; s_{\text{stopp}} \downarrow$ ok!

Om man vill använda arbete–energilagen på klossen t.ex., fås att U är arbetet av friktionskraften, vilket är ”kraften gånger vägen”. Här måste man tänka på att ”vägen” är den väg klossen rört sig från en fix punkt, inte från kälkens vänsterkant. Det gäller alltså att arbetet som friktionskraften på klossen uträttar är
$U = -F_{\text{fr}}(x_{\text{kälke}} + s) = -\mu m_2 g(x_{\text{kälke}} + s)$.