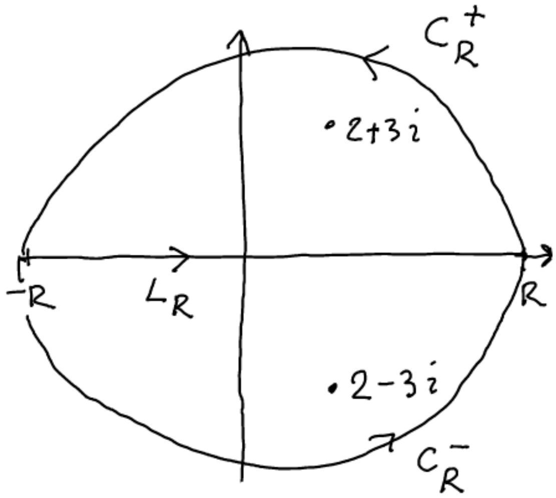
Föreläsning 11, komplex analys.

Integraler av Fouriertyp:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} e^{iax} \\ \cos ax \\ \sin ax \end{Bmatrix} h(x)\,dx \qquad , a \in \mathbb{R}$$

Ex: $$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 - 4x + 13}\,dx \qquad , a \in \mathbb{R}$$



Lösning:

sätt $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{z^2 - 4z + 13}$

för fixt a.

f är singulär i $z = 2 \pm 3i$.

$$|e^{iaz}| = |e^{-ay} \cdot e^{iax}| = e^{-ay} \leq 1 \quad \text{på } C_R^+ \quad \text{om} \quad a \geq 0$$

a reellt

och på C_R^- om $a \leq 0$.

OBS: Slut på rätt sätt.

Två fall:

$a \geq 0$:

$$(*) \int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=2+3i} f(z) = 2\pi i \cdot \left. \frac{e^{iaz}}{\frac{d}{dz}(z^2 - 4z + 13)} \right|_{z=2+3i}$$

$= \ldots = \frac{\pi}{3} e^{-3a} \cdot e^{i2a}$, R stort nog.

vidare, $\int_{L_R} f(z)\,dz = \begin{bmatrix} z = t, & t: -R \to R \\ dz = dt & \end{bmatrix} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iat}}{t^2 - 4t + 13}\,dt$

$\longrightarrow I(a)$ då $R \to \infty$

och $\left| \int_{C_R^+} f(z)\,dz \right| \leq \frac{1}{R^2 - 4R + 13} \pi R \longrightarrow 0$ då $R \to \infty$

ML uppskattning
R stort.

$\therefore$ Låt $R \to \infty$ i $(*)$:

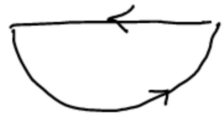
$I(a) + 0 = \frac{\pi}{3} e^{-3a} \cdot e^{i2a}$, $a \geq 0$.

<u>$a \leq 0$.</u>

$(**)$ $\int_{C_R^- - L_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z = 2-3i} f(z) = \ldots = \frac{-\pi}{3} e^{3a} e^{i2a}$, R stort nog

OBS

$\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iat}}{t^2 - 4t + 13} \longrightarrow I(a)$ då $R \to \infty$



$\left| \int_{C_R^-} f(z)\,dz \right| \leq \frac{1}{R^2 - 4R - 13} \pi R \longrightarrow 0$ då $R \to \infty$

ML

$\therefore$ Låt $R \to \infty$ i (**) som ovan:

$$0 - I(a) = \frac{-\pi}{3} e^{3a} \cdot e^{i2a}, \text{ så } I(a) = \frac{\pi}{3} e^{3a} \cdot e^{i2a}, \quad a \le 0$$

$$\therefore I(a) = \frac{\pi}{3} e^{-3|a|} \cdot e^{i2a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

---

anmärkning: $\cos ax = \frac{1}{2}\left(e^{iax} + e^{-iax}\right)$

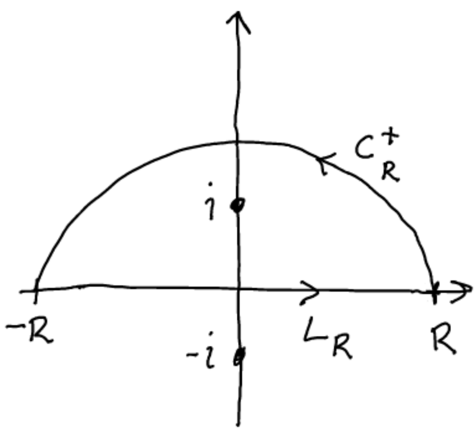
och $\sin ax = \frac{1}{2i}\left(e^{iax} - e^{-iax}\right)$

ger genast $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \cos ax \\ \sin ax \end{Bmatrix} / (x^2 - 4x + 13)\, dx$

Ex:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1}\, dx. \qquad \operatorname{Im}\left(\frac{x e^{ix}}{x^2+1}\right) = \frac{x \sin x}{x^2+1}$$

Sätt $f(z) = \dfrac{z e^{iz}}{z^2+1}$, singulär i $\pm i$



Vi får

$$\int_{L_R + C_R^+} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ p/q}}{=} 2\pi i \cdot \left.\frac{z e^{iz}}{\frac{d}{dz}(z^2+1)}\right|_{z=i} = \pi i e^{-1}, \quad R \text{ stort } (R>1)$$

Vidare: $\displaystyle\int_{L_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{t e^{it}}{t^2+1}\, dt = \int_{-R}^{R} \frac{t \cos t}{t^2+1}\, dt + i \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{t \sin t}{t^2+1}\, dt}_{\to I \text{ då } R \to \infty}$

och $\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \le \left[\begin{array}{l} |e^{iz}| = e^{-y} \le 1 \quad \text{på } C_R^+ \quad (y \ge 0) \\ |z| = R, \ |z^2+1| \ge |z|^2 - 1 = R^2 - 1 > 0, \ R \text{ stort} \end{array}\right]$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ ML}}{\le} \frac{R \cdot 1}{R^2 - 1} \pi R \not\to 0 \quad \text{då} \quad R \to \infty$$

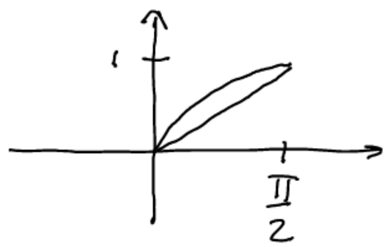
Problem! Vi behöver något bättre.

Jordans lemma

$$\int_{C_R^+} |e^{iaz}| \underbrace{|dz|}_{\text{båglängds-element}} \le \frac{\pi}{a} \qquad \text{om} \quad a \ge 0, \ R > 0.$$

Bevis: se boken. Bygger på olikheten

$\sin x \ge \frac{2}{\pi} x$ då $0 < x < \frac{\pi}{2}$



Med hjälp av detta får vi:

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{C_R^+} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}\,dz\right| \le \int_{C_R^+} \left|\frac{ze^{iz}}{z^2+1}\right| |dz| = \int_{C_R^+} \left|\frac{z}{z^2+1}\right| |e^{iz}|\,|dz| \le$$

$$\le \underset{\to 0}{\frac{R}{R^2-1}} \underbrace{\int_{C_R^+} |e^{iz}|\,|dz|}_{\le \frac{\pi}{1} \text{ enl. Jordan, alla } R > 0}$$

alltså begränsat, oberoende av R

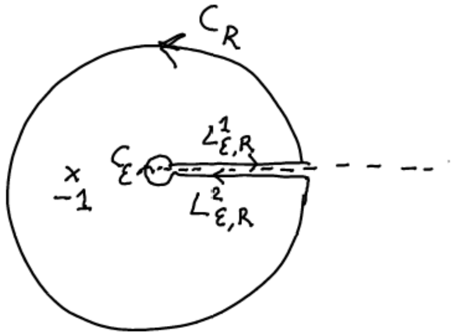
$\therefore$ Tag Im i (*), låt sedan $R \to \infty$:

$I + 0 = \pi e^{-1}$ dvs $I = \frac{\pi}{e}$

Nyckelhålskonturer

Ex: $I(a) = \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}\,dx$ $\qquad \underbrace{0<a<1}$ precis vad som krävs för konvergens

Lösning: Vi vill använda en gren till $\frac{z^{-a}}{z+1}$



Välj därför en gren till $\log z$,

$\widetilde{\log} = \ln|z| + i\theta(z)$, $\qquad 0<\theta<2\pi$

och $\widetilde{z^{-a}} = \exp(-a\widetilde{\log} z) = \underbrace{e^{-a\ln|z|}} \cdot e^{-ia\theta} = \underbrace{|z|^{-a}} \cdot e^{-ia\theta}$.

Sätt $f(z) = \frac{z^{-a}}{z+1}$

f singulär i $z=-1$ innanför konturen.

- $\int_{L^1_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \begin{bmatrix} \theta = 0 & , \widetilde{z^{-a}} = t^{-a} \\ z=t & , t:\varepsilon \to R \end{bmatrix} = \int_\varepsilon^R \frac{t^{-a}}{t+1}\,dt$

- $\int_{L^2_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \begin{bmatrix} \theta = 2\pi, & \widetilde{z^{-a}} = t^{-a}\cdot e^{-i2\pi a} \\ z=t, & t: R \to \varepsilon \end{bmatrix} = -e^{-i2\pi a} \int_\varepsilon^R \frac{t^{-a}}{t+1}\,dt$

- $\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \underset{R>1}{\leq} \frac{R^{-a}}{R-1} \cdot 2\pi R \to 0$ ty $a>0$ då $R \to \infty$

• $\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \underset{0<\varepsilon<1}{\le} \frac{\varepsilon^{-a}}{1-\varepsilon}\cdot 2\pi\varepsilon \to 0$ om $a<1$ då $\varepsilon \to 0^+$.

Residysatsen ger

$$\circledast \int_{L^1_{\varepsilon,R}+C_R+L^2_{\varepsilon,R}+C_\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) \underset{P/Q}{=} \left.\frac{2\pi i\, \widetilde{z^{-a}}}{\frac{d}{dz}(z+1)}\right|_{z=-1}$$

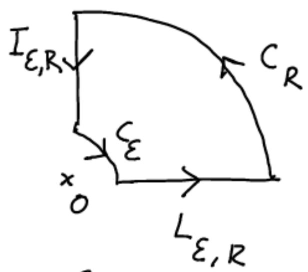
$= 2\pi i\, e^{-ia\pi}$, $0<\varepsilon<1<R$

Låt $\varepsilon \to 0^+$ och $R\to\infty$ i $\circledast$:

$$I(a) + 0 - e^{-i2\pi a} I(a) + 0 = 2\pi i\, e^{-ia\pi}$$

$$\therefore\ I(a) = \frac{2\pi i\, e^{-ia\pi}}{1-e^{-i2\pi a}} = \frac{2\pi i}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad 0<a<1$$

Ex $\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$ där $\Gamma_{\varepsilon,R}$:



vad får vi då $\varepsilon\to 0^+$ och $R\to\infty$?

$\circledast \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$ (enda singulariteten för $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ är $z=0$)

• $\int_{L_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \left[\begin{array}{l} z=t,\quad t:\varepsilon\to R \\ dz=dt \end{array}\right] = \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}\,dt =$

$$= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos t}{t}\,dt + i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$\bullet \left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{1}{|z|}\,|e^{iz}|\,|dz| = \frac{1}{R}\underbrace{\int_{C_R} |e^{iz}|\,|dz|}_{\substack{\text{begränsad}\\ \text{enl. Jordan.}}} \longrightarrow 0 \quad \text{då } R \to \infty$$

$$\bullet \int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \begin{bmatrix} z = it, & t: R \to \varepsilon \\ dz = i\,dt & \end{bmatrix} = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{e^{-t}}{it}\, i\,dt = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

$\bullet \displaystyle\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$: $f(z)$ har enkelpol i $z = 0$, så

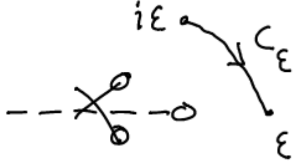
f har Laurentserie $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} c_n z^n = \frac{c_{-1}}{z} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n}_{\substack{g(z),\\ \text{analytisk}}}$

$0 < |z| < d$

Här är $c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \dfrac{e^{iz}}{\frac{d}{dz}(z)} = 1$

$$\therefore \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz}_{[\operatorname{Log} z]_{i\varepsilon}^{\varepsilon}} + \underbrace{\int_{C_\varepsilon} g(z)\,dz}_{\substack{\to 0 \text{ ty}\\ g(x) \text{ begränsad}}} =$$

$$= \ln|\varepsilon| - \ln|\varepsilon| - i\frac{\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2}$$



$\therefore$ (*) ger då $\varepsilon \to 0^+$ och $R \to \infty$ följande:

$$\int_0^\infty \frac{\cos t - e^{-t}}{t}\,dt + i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} = i\frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ Tag Re och Im.

$$\int_0^\infty \frac{\cos t - e^{-t}}{t}\,dt = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$