Komplex analys föreläsning 7.

Komplexa serier

numerisk summa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$

Delsummor $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Serien är konvergent med summa s om

$s \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n$ existerar $(s \in \mathbb{C})$, annars divergent.

OBS: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow$ de reella serierna

$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}(a_n)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Im}(a_n)$ båda är konvergenta.

SATS: (Absolutkonvergens)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}_{\substack{\text{positiv} \\ \text{serie}}} \text{ konvergent} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\substack{\text{komplex} \\ \text{serie}}} \text{ konvergent}$$

och $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Vi säger i så fall att

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolutkonvergent.

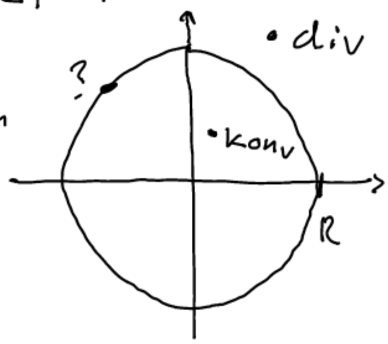
Bevis: se kapitel 5 i kompendiet.

Varje potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$,

där $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ har en konvergensradie

$0 \le R \le \infty$, med egenskapen att:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ är } \begin{cases} \text{absolutkonvergent} & \text{om } |z| < R \\ \text{divergent} & \text{om } |z| > R \end{cases}$$



Bevis: som i Forsling-Neymark förrutom att medelvärdessatsen inte kan användas.

R kan ofta bestämmas med kvot- eller rotkriteriet.

Ex: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{8^n}{n+1} z^{3n}}_{a_n}$, $R = ?$

$$|a_n| = \frac{8^n}{\sqrt{n^2+1}} \cdot |z|^{3n}$$

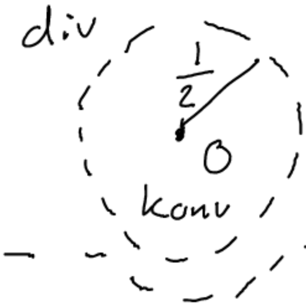
kvotkriteriet ger, för fixt $z \neq 0$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{8^{n+1} |z|^{3(n+1)}}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}} \Big/ \frac{8^n |z|^{3n}}{\sqrt{n^2+1}} = 8 \cdot |z|^3 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}}$$

$$\longrightarrow 8|z|^3 = Q \quad \text{då} \quad n \to \infty$$

Absolutkonvergens då $\underbrace{Q<1}_{|z|<\frac{1}{2}}$, div då $\underbrace{Q>1}_{|z|>\frac{1}{2}}$

$\therefore \quad R = \frac{1}{2}.$



Sats: (Termvis derivering och integrering)

sätt $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad |z|<R$ (seriens konvergensradie)

då är f analytisk i $|z|<R$,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad , |z|<R$$

eller 1

och f primitiv F i $|z|<R$,

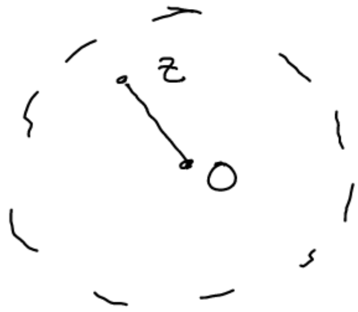
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} \quad , |z|<R$$

Serierna för f' och F har också konvergens-
-radie R

Beviskommentar, se ovan.

Anmärkning: $F(z) = \int_{[0,z]} f(s)\,ds$

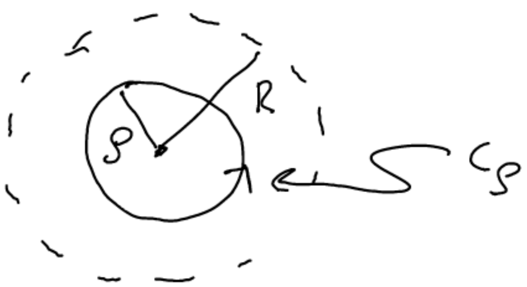
Sträckan från 0 till z, $|z|<R$



är den primitiv som har värde 0 i origo.

Följdsats: om $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|z|<R$

$R>0$, så är f, f', f'' alla analytiska i $|z|<R$, och $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \overset{\text{C.I.F}}{=} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_\rho} \dfrac{f(s)}{s^{n+1}}\,ds$ $\quad 0<\rho<R$



Speciellt är potensseriens koefficienter entydigt bestämda av potensseriens summa.

SATS: om f är analytisk (åtminstone) i $|z|<r$ där $r>0$, så är

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z|<r$$

där $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Serien kallas Maclaurinserie

och dess konvergensradie $R \geq r$

Ex: Bestäm ML-serien för $f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}$

Lösning: Sätt $g(z)=\frac{1}{z+2}$.

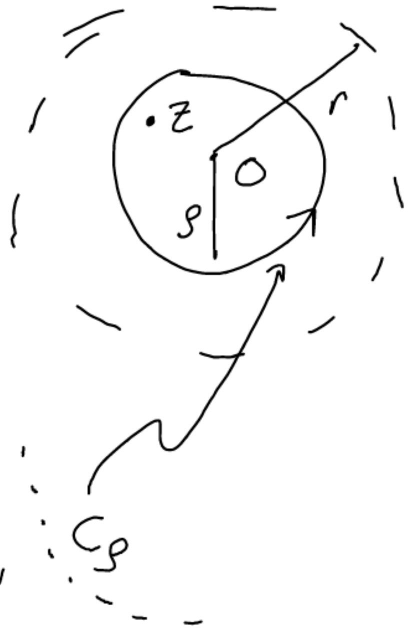
$$g(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q|<1 \quad \text{geometrisk serie}\right] = \left[q = \frac{-z}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} z^n, \quad |q| = \left|\frac{-z}{2}\right| < 1$$

dvs $|z|<2$

$$\text{så } f(z) = -g'(z) \underset{\text{termvis derivering}}{=} \frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\, n\cdot z^{n-1} \underset{k=n-1,\ n=k+1}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+2}}(k+1)z^k$$

$\underline{|z|<2}$



Bevis av Sats: fixera z med $|z|<r$ och tag sedan ρ, $|z|<\rho<r$

$$\text{C.I.F} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(s)}{s-z}\,ds$$

$$\text{Men } \frac{1}{s-z} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{s}} = \left[\begin{matrix} w = \frac{z}{s} \\ |w|<1 \end{matrix}\right] = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1-w}$$

$$= \frac{1}{s}\left(\underbrace{1+w+w^2+\dots+w^N}_{\sum_{n=0}^{N} w^N} + \frac{w^{N+1}}{1-w}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{s^{n+1}} + \frac{(z/s)^{N+1}}{s-z}$$

$$\therefore \quad f(z) = \sum_{n=0}^{N} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} \, ds \right)}_{c_n} z^n + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{(z/s)^{N+1}}{s-z} f(s) \, ds}_{\text{rest.}}$$

Här är $c_n \overset{\text{C.I.F för derivata}}{=} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, och ML-uppskattning av

resten ger:

$$|\text{rest}| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\overbrace{(|z|/\rho)}^{0 \leq \text{tal} < 1}{}^{N+1}}{\rho - |z|} \cdot \max_{|s|=\rho} f(s) \cdot 2\pi\rho$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{då} \quad N \to \infty$$

$\therefore$ Låt $N \to \infty$

$$\therefore \; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{där} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

och denna serie är konvergent, men z var godtyckligt med $|z| < r$ så seriens konvergens-radie $R \geq r$

$\blacksquare$

Standardserier

- $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \quad R = \infty$

(och dess avkomma $\sin z, \cos z, \sinh, \cosh$)

- $\mathrm{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \ldots \qquad \underline{R=1}.$

- Principalgren till $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \binom{\alpha}{2} z^2 + \ldots, \quad R=1$

$(\alpha \notin \mathbb{N})$

Ex: ML utveckla $f(z) = \tanh z$ t.o.m grad 3.
Ange också konvergensradien.

Lösning: $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$

ansats

$$\| \quad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + O(z^4)$$

Enkla räkningar ger:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{6} + O(z^5)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2} + O(z^4)$$

$\therefore$ Multiplikation med $\cosh z$ ger

$$\left(1+\frac{z^2}{2}+\mathcal{O}(z^4)\right)\left(c_0+c_1 z+c_2 z^2+c_3 z^3+\mathcal{O}(z^4)\right)=z+\frac{z^3}{6}+\mathcal{O}(z^5)$$

Identifiera koefficienter:

$$\begin{cases} z^0: & c_0 = 0 \\ z^1: & c_1 = 1 \\ z^2: & c_2 + \frac{c_0}{2} = 0 \\ z^3: & c_3 + \frac{c_1}{2} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$\therefore \; c_0 = 0, \; c_1 = 1, \; c_2 = 0, \; c_3 = \frac{-1}{3}$

$\therefore \; \tanh z = z - \frac{z^3}{3} + \mathcal{O}(z^4)$

R = avståndet till närmaste singularitet.

$\cosh z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow 2z = \log -1 = i\pi + i2\pi n \quad , n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z = i\frac{\pi}{2} + in\pi$

$\therefore \; R = \frac{\pi}{2}$