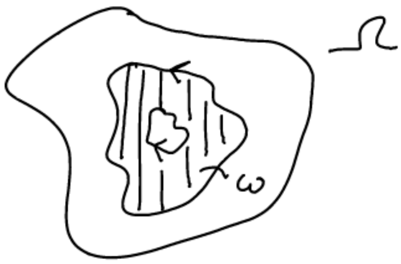
Föreläsning 6, komplex analys.

Från föreläsning 5:



ω begränsad, $\bar{\omega} \overset{\text{def}}{=} \omega \cup \partial\omega \subseteq \Omega$

$\partial\omega$ positivt orienterad, består av ändligt många styckvis C^1 kurvor.

Cauchys integralsats:

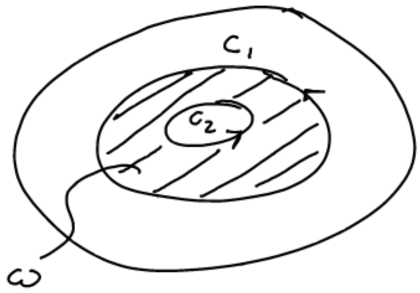
Om $f \in A(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ så $\int_C f\,dz = 0$.

Viktiga specialfall:

1)

$\partial\omega = C$

$\int_C f\,dz = 0.$

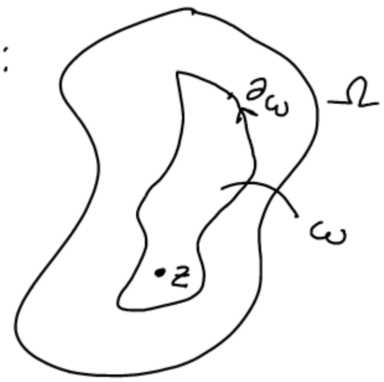


$\partial\omega = C_1 - C_2$

$$\int_{C_1} f\,dz = \int_{C_2} f\,dz.$$

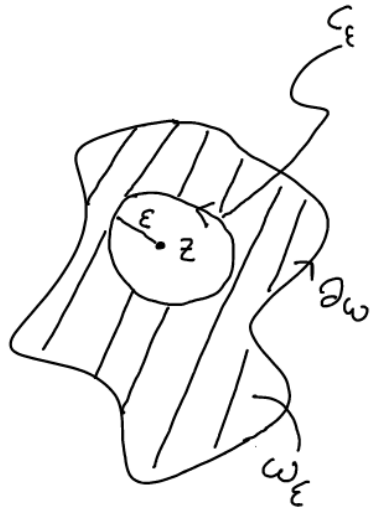
Följdsats: (Cauchys integralformel (C.I.F)).

Antag $f \in A(\Omega) \cap C^1(\Omega)$. Om $z \in \omega$, så:



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

<u>Bevis</u>: (m.h.a. Cauchys integralsats)



Fixera $z \in \omega$, och sätt $g(s) = \frac{f(s)}{s-z}$

g är analytisk i $\omega \setminus \{z\}$

men om vi tar bort cirkelskivan $\{s \in \mathbb{C} : |s-z| \leq \varepsilon\}$ från ω kan vi använda Cauchys integralsats på $g(s)$ och ω_ε:

$$0 = \int_{\partial\omega_\varepsilon} g(s)\, ds = \left[\partial\omega_\varepsilon = \partial\omega - C_\varepsilon\right] = \int_{\partial\omega} g(s)\, ds = \int_{C_\varepsilon} g(s)\, ds$$

$$= \int_{C_\varepsilon} \frac{f(s)}{s-z}\, ds = \underbrace{\int_{C_\varepsilon} \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\, ds}_{\mathrm{I}} + \underbrace{f(z) \int_{C_\varepsilon} \frac{ds}{s-z}}_{\mathrm{II}}$$

för alla små $\varepsilon > 0$.

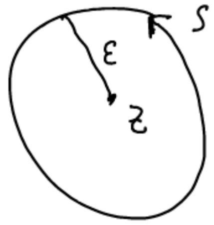
Låt $\varepsilon \to 0$ i I: $\text{längd}(C_\varepsilon) = 2\pi\varepsilon \to 0$

& $\frac{f(s)-f(z)}{s-z} \to f'(z) \in \mathbb{C}$

$\therefore$ $\mathrm{I} \to 0$ då $\varepsilon \to 0$.

Återstår II:

Direkt uträkning ger då



$$II = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

$C_\varepsilon : s = z + e^{i\theta}$

$\theta : 0 \to 2\pi.$

$\therefore$ $\varepsilon \to 0$ ger: $\displaystyle\int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{s-z} ds = 2\pi i f(z)$

$\blacksquare$

Ex: Beräkna $I = \displaystyle\int_C \frac{\sin(\pi z)}{z^2+1} dz$ då C är:

a) $|z-i| = 1/2$

b) $|z| = 2$

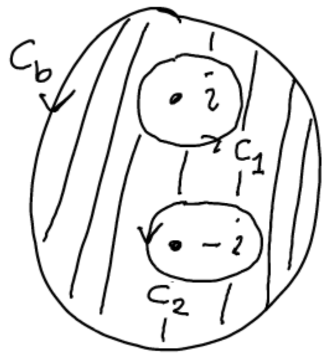
Lösning: a) $\dfrac{\sin(\pi z)}{(z+i)(z-i)}$

Sätt $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{z+i}$, är analytisk

på och innanför C_a

$\therefore$ $I_a = \displaystyle\int_{C_a} \frac{f(z)}{z-i} = \left(\int_{C_a} \frac{f(s)}{s-i} ds \right) = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{\sin(i\pi)}{2i} = i\pi \sinh \pi.$

b) $\partial\omega = C_b - C_1 - C_2$



$\dfrac{\sin \pi z}{z^2+1}$ är analytisk utom i $\pm i$.

$$\text{C.I.S} \Rightarrow \int_{\partial\omega} \frac{\sin \pi z}{z^2+1} = 0$$

$$\therefore \int_{C_b} (\ldots) = \underbrace{\int_{C_1} (\ldots)}_{I_a} + \underbrace{\int_{C_2} (\ldots)}_{?}$$

$\displaystyle\int_{C_2}$: Skriv $\dfrac{\sin \pi z}{z^2+1} = \dfrac{\overbrace{\sin(\pi z)/(z-i)}^{g(z)}}{z+i}$ analytisk på och innanför C_2.

Så $\text{C.I.F} \Rightarrow \displaystyle\int_{C_2} \frac{\sin \pi z}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\, g(-i) = \ldots = i\pi \sinh \pi.$

$$\therefore \int_{C_b} (\ldots) = 2\pi i \sinh \pi.$$

Cauchys integralformel för derivata.

Om $f \in A(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, så existerar alla $f^{(n)}$, och

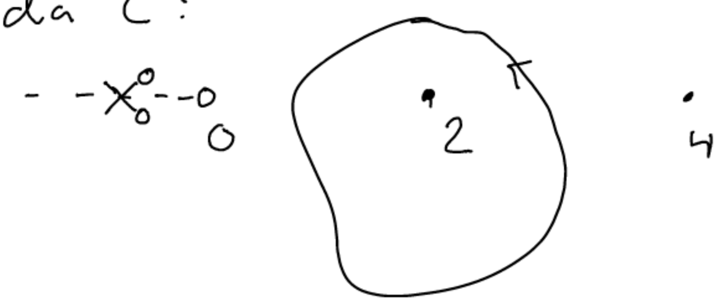
$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds \quad , z \in \omega$$

speciellt är f en C^{∞}-funktion.

Beviset (i fallet $n=1$): Se boken.

Anmärkning: det räcker faktiskt att f är analytisk, ty att $f \in C^1$ är en konsekvens av att $f \in A(\Omega)$. (se kapitel R)

Ex: $\displaystyle\int_C \frac{\log z}{(z-2)^3(z-4)}\,dz$ då C:



Lösning: Med $f(z) = \dfrac{\log z}{z-4}$, som är analytisk på och innanför C, får vi:

$$I = \int_C \frac{f(z)}{(z-2)^3}\,dz \underset{\text{bokstavsbyte}}{=} \int_C \frac{f(s)}{(s-2)^3}\,ds.$$

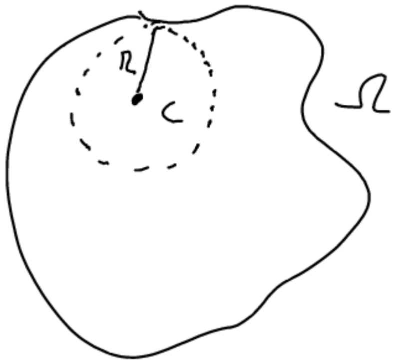
vi vet att $\displaystyle\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds$

z innanför C. Med $n=2$ och $z=2$

$$\therefore \frac{f''(2)}{2!} = \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\int_C \frac{f(s)}{(s-2)^3}\,ds}_{I}$$

Så $I = 2\pi i \dfrac{f''(2)}{2!} = \ldots = \dfrac{-i\pi}{8}(1 + 2\ln 2)$

Medelvärdesegenskapen. Maximumprincipen.



Sats: Om $f \in A(\Omega)$ och $D(c,R) \subseteq \Omega$, så

(MV): $$f(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c+re^{i\theta})\,d\theta \,, \quad \forall r<R$$

och därmed:

(SMV): $$|f(c)| \leq \int_0^{2\pi} |f(c+re^{i\theta})|\,d\theta$$

$r<R$

Bevis: C.I.F $\Rightarrow$ $$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(s)}{s-c}\,ds = \left[\begin{array}{c} s=c+re^{i\theta} \\ \theta: 0 \to 2\pi \end{array}\right] =$$

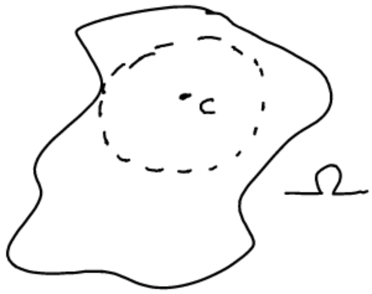
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(c+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\,re^{i\theta}\,i\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c+re^{i\theta})\,d\theta$$

$\blacksquare$

Sats: (Maximumprincipen för begränsade mängder).

Om Ω är begränsad och $f \in A(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ så antar $|f|$ sitt maximum på randen $\partial\Omega$.



Bevis: Obs att $\overset{=M}{\max_{\Omega}|f|}$ antas ty $|f|$ reellvärd och kontinuerlig på $\bar{\Omega}$ som är kompakt.

Om max antas i en inre punkt $c \in \Omega$, så får vi att $\underbrace{|f(c)|}_{M} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{|f(c+re^{i\theta})|}_{\le M} d\theta$, $r<R$

$\le M$.

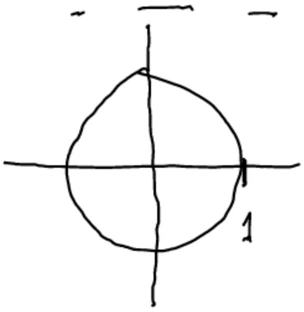
På grund av att f är kontinuerlig måste

$|f(c+re^{i\theta})| = M \quad \forall \theta,\ r<R.$

$\therefore$ $|f| = M$ i hela $D(c,R)$ och p.g.a kontinuitet även i en randpunkt.

$\therefore$ $\max |f|$ antas på randen i Ω.

Ex: Bestäm $\max|z\cos z|$ då $|z| \le 1$.



Lösning: Maxprincipen $\overset{\text{hel analytisk}}{\Longrightarrow}$ max antas på $|z| = 1$.

Där är $|z\cos z| = |\cos z|$.

Obs att $\underset{\text{se övning.}}{|\cos z|^2 = \ldots} = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

Hur stort blir detta då $x^2+y^2=1$?

$$\underbrace{\cos^2 x}_{\le 1} + \underbrace{\sinh^2 y}_{\le \sinh^2 1.}$$

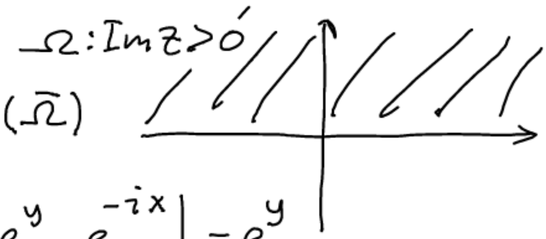
$= 1$ då $x = 0$ ⋮ $= \sinh^2 1$ då $y = \pm 1$

Så "separat optimering" fungerar faktiskt här.

$$\therefore \max_{|z| \le 1} |z \cos z| = |\pm(i) \cos(\pm i)| = \cosh 1.$$

OBS: Viktigt att Ω begränsad i satsen.

Jämför $f(z) = e^{-iz}$ då



$f \in A(\mathbb{C})$ därför $f \in A(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$|f(z)| = |e^{-iz}| = |e^{-i(x+iy)}| = |e^y \cdot e^{-ix}| = e^y$$

som t.o.m saknar maximum i $\bar{\Omega}$

på randen $\partial\Omega$ är $y = 0$ och därmed $|f| = 1$.

SATS: (Maximumprincip 2, i sammanhängande områden)

Om $f \in A(\Omega)$, där Ω är sammanhängande

så kan inte $|f|$ anta ett största värde i Ω

såvida inte f är konstant.