Lektion 9

2.62

a) Använd faktum att $x = O(\rho)$ och $y = O(\rho)$ där $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ vid beräkning, vilket är enkelt att se:

$$x = \overbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{=f(x,y)} \cdot \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=\rho} = \rho \cdot f(x,y)$$

där $|f(x,y)| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{x}{\sqrt{x^2}}\right| = 1$ - begränsad

så $x = O(\rho)$.

$$\underbrace{(x^2+y^2-1)}_{\text{är redan utvecklad t o m ordning 2.}} e^y = \left[\begin{array}{l}\text{utvecklar} \\ e^y \text{ t om ordn. 2}\end{array}\right] =$$

$$= (-1+x^2+y^2)\left(1+y+\frac{y^2}{2}+O(y^3)\right) =$$

$$= -1+x^2+y^2-y + \underbrace{yx^2+y^3}_{O(\rho^3)} - \frac{y^2}{2} + \underbrace{\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}}_{O(\rho^4)} + \underbrace{O(y^3)}_{O(\rho^3)}\underbrace{(-1+x^2+y^2)}_{O(1)} =$$

$$= -1-y+x^2+\frac{y^2}{2}+O(\rho^3)$$

Svar $-1-y+x^2+\frac{y^2}{2}+O(\rho^3)$,

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

c) Det är klart att $x = O(R)$, $y = O(R)$, $z = O(R)$ där $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ t ex

$$z = \underbrace{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{=f(x,y,z)} \cdot \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{=R} = R \cdot \underbrace{f(x,y,z)}_{\substack{\text{begränsad,} \\ |f| \leq 1}} = O(R)$$

Utvecklar varje term t o m ordning 2:

$$2\sqrt{1+x^2+y} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+t} = \\ = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + O(t^3) \end{array} \right] =$$

$$= 2\left[1 + \frac{x^2+y}{2} - \frac{(x^2+y)^2}{8} + O((x^2+y)^3)\right] =$$

$$= \underline{2 + x^2 + y} - \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{=O(R^4)} - \underbrace{\frac{x^2 y}{2}}_{=O(R^3)} - \underline{\frac{y^2}{4}} + \underbrace{O((\underbrace{x^2+y}_{=O(R)})^3)}_{=O(R^3)}$$

$$= 2 + y + x^2 - \frac{y^2}{4} + O(R^3)$$

$$-\cos(x-z) = \left[\begin{array}{l} \cos t = \\ = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) \end{array} \right] =$$

$$= -\left[1 - \frac{(x-z)^2}{2} + O((x-z)^4)\right] =$$

$$= -\left[1 - \frac{x^2}{2} + xz - \frac{z^2}{2} + \overbrace{O((\underbrace{x-z}_{=O(R)})^4)}^{=O(R^4)}\right]$$

$$= -1 + \frac{x^2}{2} - xz + \frac{z^2}{2} + O(R^4)$$

$$= -1 + \frac{x^2}{2} - xz + \frac{z^2}{2} + O(R^4)$$

Totalt: $2\sqrt{1+x^2+y} - \cos(x-z) - y =$

$$= 2 + \cancel{y} + x^2 - \frac{y^2}{4} + O(R^3) - 1 + \frac{x^2}{2} - xz + \frac{z^2}{2} + O(R^4) - \cancel{y} =$$ 2

$$= 1 + \frac{3x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} - xz + O(R^3), \quad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}!$$

Svar: $1 + \frac{3x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} - xz + O(R^3)$.

2.63

Vi använder (se t ex boken Sats 10 s 94)

$$(*)\quad f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right)$$
$$+ \underbrace{(h^2+k^2)^{3/2}B(h,k)}_{=O(s^3)}, \quad /B(h,k) \text{ begränsad för små } h,k./$$

i vårt fall $f(x,y) = \ln(2x^2+xy+y^2)$,
$(a,b) = (2,-1)$.

$$f(2,-1) = \ln(8-2+1) = \ln 7$$

$$f'_x = \frac{4x+y}{2x^2+xy+y^2} \Rightarrow f'_x(2,-1) = \frac{8-1}{7} = 1.$$

$$f'_y = \frac{x+2y}{2x^2+xy+y^2} \Rightarrow f'_y(2,-1) = \frac{2-2}{7} = 0$$

$$f''_{xx} = \left(\frac{4x+y}{2x^2+xy+y^2}\right)'_x = \frac{4(2x^2+xy+y^2) - (4x+y)(4x+y)}{(2x^2+xy+y^2)^2}$$

$$= \frac{8x^2+4xy+4y^2-16x^2-8xy-y^2}{(2x^2+xy+y^2)^2} = \frac{-8x^2-4xy+3y^2}{(2x^2+xy+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow f''_{xx}(2,-1) = \frac{-32+8+3}{49} = \frac{-21}{49} = -\frac{3}{7}$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{4x+y}{2x^2+xy+y^2}\right)'_y = \frac{1(2x^2+xy+y^2)-(2y+x)(4x+y)}{(2x^2+xy+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+\cancel{xy}+y^2-8xy-4x^2-2y^2-\cancel{xy}}{(2x^2+xy+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2-8xy-y^2}{(2x^2+xy+y^2)^2} \Rightarrow$$

$$f''_{xy}(2,-1) = \frac{-8+16-1}{49} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

$$f''_{yy} = \left(\frac{x+2y}{2x^2+xy+y^2}\right)'_y = \frac{2(2x^2+xy+y^2)-(x+2y)^2}{(2x^2+xy+y^2)^2} =$$

$$= \frac{4x^2+2xy+2y^2-x^2-4xy-4y^2}{(2x^2+xy+y^2)^2} =$$

$$= \frac{3x^2-2xy-2y^2}{(2x^2+xy+y^2)^2} \Rightarrow$$

$$f''_{yy}(2,-1) = \frac{3\cdot 4+4-2}{49} = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}.$$

Insättning i (*) ger

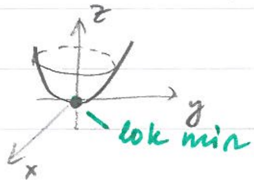
$$f(2+h,-1+k) = \ln 7 + h + \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{7}h^2 + \frac{2}{7}hk + \frac{2}{7}k^2\right] + O(\rho^3) \text{ där } \rho = \sqrt{h^2+k^2}.$$

Svar: $f(2+h,-1+k) = \ln 7 + h - \frac{3}{14}h^2 + \frac{1}{7}hk + \frac{1}{7}k^2 + O(\rho^3)$,
$\rho = \sqrt{h^2+k^2}$

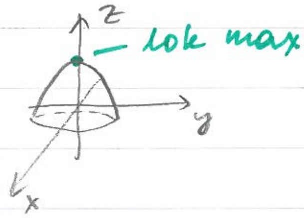
2.65

Vi använder oss av definitionen:

* Om $f(x,y) \geq f(0,0)$ för alla (x,y) nära $(0,0)$ $\Rightarrow$ $f(x,y)$ har ett lokalt minimum i $(0,0)$.



* Om $f(x,y) \leq f(0,0)$ för alla (x,y) nära $(0,0)$ $\Rightarrow$ $f(x,y)$ har ett lokalt maximum i $(0,0)$.



a) Eftersom $f(x,y) = 1 - \overbrace{|x|}^{\geq 0} - \overbrace{y^2}^{\geq 0} \leq 1 = f(0,0)$ för alla (x,y) $\Rightarrow$ $(0,0)$ är ett lokalt maximipunkt.

b) $f(0,0) = -1$, och

$$f(x,y) = \underbrace{|x|}_{\geq 0} - \cos y \geq -\cos y \geq -1 = f(0,0).$$

Vi ser att $f(x,y) \geq f(0,0)$ för alla (x,y) $\Rightarrow$ f har ett lokalt minimum i $(0,0)$.

c) $f(0,0) = 1$. Om vi väljer $x \neq 0$ liten och $y = 0$ är $f(x,y) = \underbrace{|x|}_{>0} + \underbrace{\cos y}_{=1} > 1$.

Om vi väljer $x = 0$ och $y \neq 0$ liten är $f(x,y) = 0 + \underbrace{\cos y}_{<1} < 1$.

Vi ser att för visa (x,y) nära $(0,0)$ är $f(x,y) > f(0,0)$ och för visa (x,y) nära $(0,0)$ är $f(x,y) < f(0,0)$, vilket betyder att

f har varken max eller min i $(0,0)$.

d) $f(0,0,0) = 0$.

Låt $x \neq 0$ vara liten, $y = z = 0 \Rightarrow f(x,y,z) > 0$.
Låt $x = 0$, $y > 0$, $z > 0$ är små $\Rightarrow f(x,y,z) = -yz < 0$

$\Rightarrow$ f har varken lok. max eller min i $(0,0)$.

e) $f(0,0,0) = \cos 0 = 1$.

$f(x,y,z) = \cos xyz \leq 1 = f(0,0,0)$, eftersom $\cos t \leq 1$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

$f(0,0,0) \geq f(x,y,z)$ innebär att f har lokalt maximum i $(0,0,0)$.

f) $f(0,0,0) = 1$

Låt $x \neq 0$ vara liten, $y = z = 0 \Rightarrow f(x,y,z) = (1+x^2) > 1$
Låt $x = 0$, $y = 0$, $z \neq 0$ vara liten $\Rightarrow$
$f(x,y,z) = e^{-\overbrace{z^2}^{>0}} < 1$.

$\Rightarrow$ f har varken lok. max eller min i $(0,0)$.

g) $f(0,0) = 0$

Låt $x = -y$, $x > 0$, $y < 0$, x, y - små $\Rightarrow$

$f(x,y) = 0 + \underbrace{x}_{>0}\underbrace{y^3}_{<0} < 0$.

Låt $y = 0$, $\underset{\text{liten}}{x \neq 0}$ $\Rightarrow f(x,y) = x^2 + 0 > 0$.

$\Rightarrow$ f har varken lok max eller min i $(0,0)$

2.66

a) $Q(h,k) = h^2 - hk + k^2 = h^2 - hk + \frac{k^2}{4} + k^2 - \frac{k^2}{4} =$

$= \left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4} \geq 0$ för alla h och k.

Om $Q(h,k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} h - \frac{k}{2} = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 \\ k = 0 \end{cases}$

d vs $Q(h,k) = 0$ endast om $h = 0, k = 0$.

Vi ser att $Q(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$.

Svar: positivt definit.

b) Qs matris är $Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$. Vi söker egenvärdena:

$\det(Q - \lambda \cdot I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= \lambda^2 - 1 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - \frac{5}{4}$

och $\lambda^2 - \frac{5}{4} = 0$ har lösningarna $\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

I så fall Q är indefinit.

Svar: indefinit.

c) Det är enklast att använda definitionen:
Låt $k = -h$, $h \neq 0 \Rightarrow Q(h,k) = -h^2 < 0$
Låt $k = h$, $h \neq 0 \Rightarrow Q(h,k) = h^2 > 0$.
$Q(h,k)$ antar såväl positiva som negativa värden.

Svar: indefinit.

d) $Q(h,k,l) = 6k^2 + l^2 - 6hk - 2hl + 4kl$

$$= l^2 + l(4k-2h) + 6k^2 - 6hk$$

$$= \underbrace{l^2 + 2l(2k-h) + (2k-h)^2}_{(l+(2k-h))^2} + 6k^2 - 6hk - (2k-h)^2 =$$

$$= (l+2k-h)^2 + 6k^2 - 6hk - 4k^2 + 4kh - h^2$$

$$= (l+2k-h)^2 + 2k^2 - 2hk - h^2$$

$$= (l+2k-h)^2 - h^2 - 2hk - k^2 + 2k^2 + k^2 =$$

$$= (l+2k-h)^2 - (h+k)^2 + 3k^2$$

är uppenbarligen indefinit. (T.ex $Q(0,0,l) > 0$ för $l > 0$, $Q(h,0,h) < 0$ för $h > 0$)

e) Qs matris är

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(Q - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)\big((3+\lambda)(4+\lambda) - 4\big) - 2\cdot 2\cdot(-4-\lambda) =$$

$$= (-2-\lambda)(12 + 7\lambda + \lambda^2 - 4) + 16 + 4\lambda =$$

$$= (-2-\lambda)(\lambda^2 + 7\lambda + 8) + 16 + 4\lambda =$$

$$= -2\lambda^2 - 14\lambda - \cancel{16} - \lambda^3 - 7\lambda^2 - 8\lambda + \cancel{16} + 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 9\lambda + 18) = -\lambda(\lambda+3)(\lambda+6)$$

8

Vi ser att $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -6$ $\Rightarrow$
Q är negativt semidefinit.

f) $Q(h,k,\ell) = h^2 + 2hk + k^2 + k^2 =$

$$= (h+k)^2 + k^2 + 0 \cdot \ell^2$$

$\Rightarrow$ Q är positivt semidefinit, eftersom
$Q(h,k,\ell) \geq 0$ alltid, men $Q(0,0,\ell) = 0$
för alla ℓ.

g) Vi ser att $Q(h,k,\ell) = (h-k)^2 + (k-\ell)^2 + (\ell-h)^2 \geq 0$.

Om $Q(h,k,\ell) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} h-k=0 \\ k-\ell=0 \\ \ell-h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=k \\ \ell=k \\ k-k=0 \text{ - alltid sant,} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h=k \\ \ell=k \end{cases}$$

vilket betyder att $Q(k,k,k) = 0$ för alla k.

Vi ser att Q är positivt semidefinit.

h) $Q(h,k,\ell) = h^2 + 2hk + k^2 + 2k^2 - 4k\ell + 6\ell^2 =$

$$= (h+k)^2 + \underbrace{2k^2 - 4k\ell + 2\ell^2}_{=2(k-\ell)^2} + 4\ell^2 =$$

$$= (h+k)^2 + 2(k-\ell)^2 + 4\ell^2 \geq 0.$$

Om $Q(h,k,\ell) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} h+k=0 \\ k-\ell=0 \\ \ell=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h=0 \\ k=0 \\ \ell=0 \end{cases} \Rightarrow$$ om $(h,k,\ell) \neq (0,0,0)$ så är $Q(h,k,\ell) > 0$.

Q är positivt definit

2.68

a) $\underbrace{(x^2+y^2-1)e^y}_{=f(x,y)}$ satisfierar $f(0,0)=-1$ och

$$f(x,y) = -1 - y + x^2 + \frac{y^2}{2} + O(\rho^3)$$

vilket kan skrivas om som

$$f(x,y) = f(0,0) - y + O(\rho^2)$$

Eftersom $O(\rho^2)$ är liten jämfört med $-y = O(\rho)$ om $\rho \to 0$
ser vi att

$$f(x,y) = \begin{cases} f(0,0) - \overset{<0}{y} + \overset{\text{liten}}{O(\rho^2)} > f(0,0) & \text{då } y<0 \\ f(0,0) - \underset{>0}{y} + \underset{\text{liten}}{O(\rho^2)} < f(0,0) & \text{då } y>0 \end{cases}$$

Vilket betyder att $(0,0)$ är varken lok. max eller lok min.

c) $\underbrace{2\sqrt{1+x^2+y} - \cos(x-z) - y}_{=f(x,y,z)}$ satisfierar $f(0,0,0)=1$
och

$$f(x,y,z) = 1 + \frac{3x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} - xz + O(r^3)$$

vilket kan skrivas om som

$$f(x,y,z) = f(0,0,0) + \underbrace{\frac{3x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} - xz}_{=Q(x,y,z)} + O(r^3)$$

där $O(r^3)$ är liten jämfört med $Q(x,y,z) = O(r^2)$
då $r \to 0$.

Vi undersöker tecken på $Q(x,y,z)$:

$$Q(x,y,z) = \frac{z^2}{2} - xz + \frac{x^2}{2} + x^2 - \frac{y^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}(x-z)^2 + x^2 - \frac{y^2}{4} \Rightarrow \text{indefinit},$$

dvs Q kan vara både positiv och negativ.

Vi ser att

$$f(x,y,z) = \begin{cases} f(0,0,0) - \frac{y^2}{4} + \overbrace{O(r^3)}^{\text{liten}} < f(0,0,0) & \text{om } x=z=0,\ y \neq 0 \\ f(0,0,0) + \frac{z^2}{2} + \underbrace{O(r^3)}_{\text{liten}} > f(0,0,0) & \text{om } x=y=0,\ z \neq 0 \end{cases}$$

Vilket betyder att $(0,0,0)$ är varken lok. max eller lok. min.

Extra

2.64

a) Betrakta alla möjliga rätta linjer genom origo. Låt först $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. I så fall

$$f(x,y) = f(x,kx) = (kx - x^2)(kx - 3x^2) =$$
$$= x^2(k-x)(k-3x) > 0 = f(0,0)$$

om $x>0$ är tillräckligt liten jämfört med k.

Låt nu $y = 0$. Vi får att

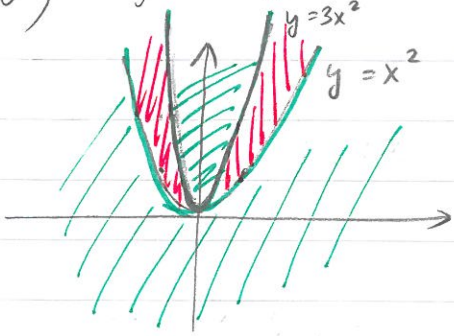
$$f(x,y) = f(x,0) = -x^2 \cdot (-3x^2) = 3x^4 > 0 = f(0,0)$$
om $x \neq 0$.

Låt till sist $x = 0$ $\Rightarrow$

$$f(x,y) = f(0,y) = y^2 > 0 = f(0,0) \quad \text{om } y \neq 0.$$

Vi ser att $f(x,y) > f(0,0)$ gäller för $(x,y) \neq (0,0)$ längs varje rätt linje genom origo.

b) f har inte lokalt min. i origo eftersom



i det gröna området (utan rand) gäller

$$(y-x^2)(y-3x^2)>0$$

medan i det röda området gäller $\underbrace{(y-x^2)}_{>0}\underbrace{(y-3x^2)}_{<0}<0$.

Eftersom $\begin{cases} f(x,y) > f(0,0) & \text{i det gröna omr.} \\ f(x,y) < f(0,0) & \text{i det röda omr.} \end{cases}$

$\Rightarrow$ f har inte lok. min i origo.

Förklaringen är att $y=3x^2$ och $y=x^2$ har samma tangent i origo (linjen $y=0$) $\Rightarrow$ ingen rätt linje kan ta sig in i det röda området för x mycket nära 0.

2.67

Betrakta $Q(h,k)=h^2+2ahk+k^2$. Den associerade matrisen är

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(Q-\lambda\cdot I)=\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{pmatrix}=(1-\lambda)^2-a^2.$$

Egenvärdena fås av ekvationen

$$(\lambda-1)^2-a^2=0 \Leftrightarrow \lambda-1=\pm a \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1=1+a \\ \lambda_2=1-a \end{array}$$

Q är negativt definit om $\lambda_1 < 0$ och $\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1+a<0 \\ 1-a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-1 \\ a>1 \end{cases} \Rightarrow \text{aldrig.}$$

Q är positivt definit om $\lambda_1 > 0$ och $\lambda_2 > 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1+a>0 \\ 1-a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-1 \\ a<1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<a<1 \Leftrightarrow |a|<1.$$

Q är positivt semidefinit om antingen $\lambda_1 = 0$ eller $\lambda_2 = 0$ d v s om $a=-1$ eller $a=1$. $(|a|=1)$

Q är indefinit om $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow$

$$(1+a)(1-a)<0 \Leftrightarrow 1-a^2<0 \Leftrightarrow a^2>1$$

d v s om antingen $a>1$ eller $a<-1$.
(vilket betyder $|a|>1$)

Svar: $|a|<1$: positivt definit
$|a|=1$: positivt semidefinit
$|a|>1$: indefinit.