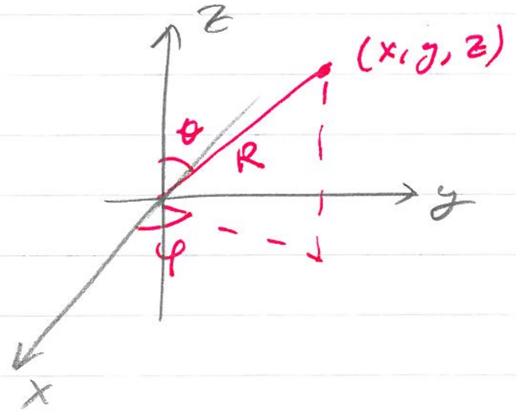
Lektion 3

Om funktionen beror på $x^2+y^2+z^2$ är det ofta bekvämt att byta mot sfäriska koordinater (se boken s 27 exempel 19)

$$x = R\sin\theta\cos\varphi \qquad 0 \le \theta \le \pi$$
$$y = R\sin\theta\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$z = R\cos\theta$$



I så fall $x^2+y^2+z^2=R^2 \Rightarrow$
$(x,y,z) \to (0,0,0) \Leftrightarrow R \to 0.$

OBS! Sfäriska koordinater kommer att användas mycket senare i kursen!

1.24

a) Metod 1 (Sfäriska koordinater)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{R\to 0} \frac{R^3 \sin\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\theta}{R^2}$$

$$= \lim_{R\to 0} \underbrace{R}_{\to 0} \underbrace{\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta}_{\text{begränsad}} = 0$$

Metod 2 (Uppskattningar)

Observera att $x^2+y^2+z^2 = R^2$ – avst. till origo
$\Rightarrow |x| = \sqrt{R^2-y^2-z^2} < R$ och
$|y| < R, \quad |z| < R.$

$$\Rightarrow \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{|x||y||z|}{R^2} \le \frac{R^3}{R^2} = R \to 0$$
då $(x,y,z) \to (0,0,0)$

Då måste $\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \to 0$ då $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

Svar: 0.

b) Metod 1. Vi modifierar sfäriska koordinater lite så att $x^2+2y^2+3z^2 = R^2$

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} R\sin\theta\sin\varphi \\ z &= \tfrac{1}{\sqrt{3}} R\cos\theta \end{aligned} \implies x^2+2y^2+3z^2 =$$

$$= R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \cancel{2}\cdot\tfrac{1}{\cancel{2}} R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cancel{3}\cdot\tfrac{1}{\cancel{3}} R^2\cos^2\theta = \dots = R^2$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3xz^2}{x^2+2y^2+3z^2} = \lim_{R\to 0} \frac{\cancel{3}\cdot R\sin\theta\cos\varphi\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{R^2}\cos^2\theta}{\cancel{R^2}}$$

$$= \lim_{R\to 0} \overbrace{R}^{\to 0} \underbrace{\sin\theta\cos\varphi\cos^2\theta}_{\text{begränsad}} = \boxed{0}$$

Metod 2 (Uppskattningar).

Låt $x^2+y^2+z^2 = R^2$ där R är som vanligt avståndet till origo. I så fall $|x|<R$, $|y|<R$, $|z|<R$, och

$$x^2+2y^2+3z^2 = (x^2+y^2+z^2)+y^2+3z^2 =$$

$$= R^2 + \underbrace{(y^2+3z^2)}_{\geq 0} \geq R^2 \implies$$

$$\left|\frac{3xz^2}{x^2+2y^2+3z^2}\right| \leq \frac{3R\cdot R^2}{R^2} = 3R \to 0 \text{ då } R\to 0$$

$$\implies \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3xz^2}{x^2+2y^2+3z^2} = \boxed{0.}$$

R - avst. till origo

c) (Intuitivt: nämnaren beter sig som R^2 (ungefär), medan täljaren beter sig som R, d v s nämnaren går mot noll fortare än täljaren, och $\lim_{R\to 0} \frac{R}{R^2} = \lim_{R\to 0} \frac{1}{R} = \infty$.

Men det finns riktningar där täljaren är exakt noll, t ex i planet $\pi = \{x+2y-z=0\}$, och i dessa riktningar är gränsvärdet 0.

Så det verkar som om gränsvärdet saknas!)

För att bevisa att gränsvärdet saknas tar vi först gränsvärdet längs en linje

$$l: \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$, vilken ligger i planet π (se ovan)

$$\lim_{l \ni (x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+2y-z}{3x^2+y^2+z^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-t+2t-t}{3t^2+t^2+t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{0}{5t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

Nu tar vi gränsvärdet längs någon linje som inte ligger i planet π, t ex

$$m: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{m \ni (x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+2y-z}{3x^2+y^2+z^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{3t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{3t} = \infty$$

Vi ser att vi har olika gränsvärde längs olika linjer $\Rightarrow$ det gemensama <u>gränsvärdet saknas</u>.

3

1.25

a) $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \dfrac{\sin x^2y^2}{2x^2+3y^2} = \left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ \sqrt{x^2+y^2}=\rho\to\infty \end{array}\right] =$

$= \lim\limits_{\rho\to\infty} \dfrac{\sin\left[\rho^2\cos^2\varphi\,\rho^2\sin^2\varphi\right]}{2\rho^2\cos^2\varphi + \underbrace{3\rho^2\sin^2\varphi}_{=2\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}} =$

$= \lim\limits_{\rho\to\infty} \dfrac{\sin(\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi)}{2\rho^2+\rho^2\sin^2\varphi} =$

$= \lim\limits_{\rho\to\infty} \dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\sin(\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi)}{2+\underbrace{\sin^2\varphi}_{\geq 0}}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{nämnaren} \\ \text{är begränsad,} \\ \text{täljaren} \geq 2 \end{array}\right]$

$= 0$, eftersom $\frac{1}{\rho^2}\to 0$ och funktionen i paranteser satisfierar

$$\left|\frac{\sin(\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi)}{2+\sin^2\varphi}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{dvs begränsad}$$

Svar: 0

b) $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+x+y^2} = \left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ \sqrt{x^2+y^2}=\rho\to\infty \end{array}\right] =$

$= \lim\limits_{\rho\to\infty} \dfrac{\rho^2}{\rho^2+\rho\cos\varphi} = \lim\limits_{\rho\to\infty} \dfrac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{\rho}\cos\varphi}_{\to 0}} = 1$

Svar: 1

c) $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} xy\,e^{-x^2-y^2} = \left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ \sqrt{x^2+y^2}=\rho\to\infty \end{array}\right] =$

hastighetstabell!

1.

$$= \lim_{\rho\to\infty} \rho^2\cos\varphi\sin\varphi\, e^{-\rho^2} = \lim_{\rho\to\infty} \underbrace{\frac{\rho^2}{e^{\rho^2}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{\text{begränsad}} = 0$$

Svar: 0

1.26

a) Alla räta linjer genom origo är
$y = kx$, $k \in \mathbb{R}$ (const) och $x = 0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{y^4}{y^4+(y-x^2)^2} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{(kx)^4}{(kx)^4+(kx-x^2)^2}}_{(*)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{k^4x^4}{k^4x^4+k^2x^2-2kx^3+x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{k^4x^2}^{\to 0}}{\underbrace{k^4x^2}_{\to 0}+k^2\underbrace{-2kx+x^2}_{\to 0}} = \frac{0}{k^2} = 0$$

om $k \neq 0$

Om $k=0$, $(*)=0$, så gränsvärdet är igen 0 i det här fallet.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{y^4}{y^4+(y-x^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2+1}$$

$$= \frac{0}{1} = 0.$$

Vi ser att gränsvärdet är noll längs varje rätt linje genom origo.

b) Låt oss studera gränsvärdet längs kurvan $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x^2}} \frac{y^4}{y^4+(y-x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+(\cancel{x^2-x^2})^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$$ – inte samma gränsvärde som i a)!

Det betyder att gränsvärdet saknas.

1.28

Det är klart att $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

är kontinuerlig för alla $(x,y) \neq (0,0)$ (kombination av elementära funktioner).

Vi kollar på $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = \left[\begin{matrix} x^2+y^2 = t \\ (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow t\to 0 \end{matrix} \right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} t = 0$$, så $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$,

medan $f(0,0) = 1 \Rightarrow f(0,0) \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

och f är inte kontinuerlig i $(0,0)$.

Men om man ändrar värdet $f(0,0)$ och sätter $f(0,0) = 0$, då $0 = f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ så funktionen är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$.

Svar f är kontinuerlig i alla punkter förutom (0, 0). Om vi sätter $f(0,0)=0$ blir f kontinuerlig överallt.

1.29 Om f ska bli kontinuerlig i origo måste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

a) Eftersom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \left[\begin{matrix} x^2+y^2=t \\ (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow t\to 0 \end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$ måste vi ta $f(0,0)=1$.

Svar: sätt $f(0,0)=1$.

b) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=-2x}} \frac{(2x+y)^2}{x^2+3y^2+2xy} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+12x^2-4x^2} = 0$$

medan

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} \frac{(2x+y)^2}{x^2+3y^2+2xy} = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y^2}\,1}{3\cancel{y^2}} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ gränsvärdet då $(x,y)\to(0,0)$ saknas.

Därför spelar det ingen roll hur vi definierar funktionen i (0, 0), den blir aldrig kontinuerlig.

Svar nej.

Alternativ metod: byt mot polära koordinater!

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{(2\varrho\cos\varphi + \varrho\sin\varphi)^2}{\varrho^2\cos^2\varphi + 3\varrho^2\sin^2\varphi + 2\varrho^2\cos\varphi\sin\varphi} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\cancel{\varrho^2}(2\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{\cancel{\varrho^2}(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi)} =$$

$$= \frac{(2\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi}$$

Detta är $\begin{cases} 4 & \text{när } \varphi = 0 \\ \frac{1}{3} & \text{när } \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$ gränsvärdet saknas.

<u>Svar</u>! nej!

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2+3y^2+x^2y^2}{2x^2+y^2} = \left[\begin{matrix} x = \varrho\cos\varphi & (x,y)\to(0,0) \\ y = \varrho\sin\varphi & \Leftrightarrow \varrho\to 0 \end{matrix}\right]$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{6\cancel{\varrho^2}\cos^2\varphi + 3\cancel{\varrho^2}\sin^2\varphi + \varrho^{\cancel{4}\,2}\cos\varphi\sin\varphi}{2\cancel{\varrho^2}\cos^2\varphi + \cancel{\varrho^2}\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{(3+3\cos^2\varphi) + \varrho^2\cos\varphi\sin\varphi}{1+\cos^2\varphi} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0}\left(3 + \underbrace{\varrho^2}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1+\cos^2\varphi}}_{\text{begränsad}}\right) = 3 \Rightarrow$$

Om $f(0,0)=3$ så är funktionen kontinuerlig.

<u>Svar</u>: sätt $f(0,0)=3$.

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\exp\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left[\begin{matrix} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \\ (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow \varrho\to 0 \end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \varrho\cos\varphi\exp\left(\frac{-1}{\varrho}\right) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho}{e^{1/\varrho}}\cdot\cos\varphi =$$

8

$$= \lim_{\rho \to 0} \underbrace{\left(\frac{\overset{\to 0}{\rho}}{\underset{\to \infty}{e^{1/\rho}}} \right)}_{\to 0} \underbrace{\cos\varphi}_{\text{begränsad}} = 0. \Rightarrow$$

om $f(0,0) = 0$ så är funktionen kontinuerlig.

Extra

1.24d

Metod 1
$$\frac{\ln(1+\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{R^2,\text{ där } R\text{-avst. till origo}})}{x^2+y^2+z^2+3\sin xyz} =$$

$$= \frac{\ln(R^2+1)}{R^2+3\sin xyz} = \frac{\ln(R^2+1)}{R^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{3\sin xyz}{R^2}} = \otimes$$

Vi undersöker $\lim\limits_{(x,y,z)\to 0} \frac{3\sin xyz}{R^2}$.

Eftersom $|x| < R$, $|y| < R$, $|z| < R$ och $R \to 0$ -
$\Rightarrow xyz \to 0$ - kan använda Maclaurin

$$\Rightarrow \left| \frac{3\sin xyz}{R^2} \right| = \left| \frac{3 \cdot O(xyz)}{R^2} \right| = \left| \frac{3 \cdot xyz \cdot h(xyz)}{R^2} \right| =$$

$h(xyz)$ är begränsad då $R \to 0$

$$= \frac{3|x||y||z||h(xyz)|}{R^2} \leq \frac{3R^3 \cdot |h(x,y,z)|}{R^2} =$$

$$= \underbrace{3R}_{\to 0} \underbrace{|h(x,y,z)|}_{\text{begr. då } R\to 0} \to 0 \quad \text{då } R \to 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3\sin xyz}{R^2} = 0.$$

Vi ser att

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \otimes = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \underbrace{\frac{\ln(R^2+1)}{R^2}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{1+\underbrace{\frac{3\sin xyz}{R^2}}_{\to 0}} = 1$$

Svar: 1

Metod 2 Sfäriska koordinater + Maclaurin ($\sin(xyz) = O(xyz)$) – ungefär samma lösning.

1.27

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-y^2}}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+x^2)-(1-y^2)}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2})} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{x^2+y^2}}{\cancel{(x^2+y^2)}} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2})} = \frac{1}{2}$$

$((x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow \rho\to 0 \Rightarrow |x|<\rho$ innebär $x\to 0)$.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\cancel{2}}}{\cancel{\rho}|\cos\varphi| + \cancel{\rho}|\sin\varphi|} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho}{|\cos\varphi|+|\sin\varphi|} = \otimes.$$ Är $\frac{1}{|\cos\varphi|+|\sin\varphi|}$ begränsad?

Observera att $(|\cos\varphi| + |\sin\varphi|)^2 = 1 + |\sin 2\varphi| \geq 1 \Rightarrow$

$$|\cos\varphi| + |\sin\varphi| \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{|\cos\varphi| + |\sin\varphi|} \leq \frac{\rho}{1} = \rho \to 0 \text{ då } (x,y) \to (0,0).$$

Vi ser att $\otimes = 0$.

<u>Svar: 0</u>

c) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0, \text{ medan}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}.$$

Vi ser att <u>gränsvärdet saknas.</u>

<u>1.30</u> a) Vi tar

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin\theta\cos\varphi$$
$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = \frac{R}{\sqrt{3}} \cos\theta$$

så att $2x^2 + y^2 + 3z^2 = R^2$. I så fall

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{R\to 0} \frac{\frac{R^2}{2}\sin^2\theta\cos^2\varphi + R^3\sin^3\theta\sin^3\varphi + \frac{R^4}{9}\cos^4\varphi}{R^2}$$

$$= \lim_{R\to 0} \left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\varphi + R\sin^3\theta\sin^3\varphi + \frac{R^2}{9}\cos^4\varphi\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} & \text{då } \theta = \varphi = \frac{\pi}{4},\ R \to 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2} & \text{då } \theta = \frac{\pi}{2},\ \varphi = 0,\ R \to 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ gränsvärdet saknas.

Svar: nej.

b) $f(x,y,z) = \dfrac{(x+1)yz}{(x+1)^2+y^2+z^2}$

Här $(x+1)^2+y^2+z^2 = R^2$ där R är avståndet mellan $(-1,0,0)$ och (x,y,z) $\Rightarrow$

$|x+1| < R$, $|y| < R$, $|z| < R$. Vi ser att

$$\left|\frac{(x+1)yz}{(x+1)^2+y^2+z^2}\right| = \frac{|x+1||y||z|}{R^2} \leq \frac{R^3}{R^2} = R \to 0$$

då $(x,y,z) \to (-1,0,0)$.

Så funktionen blir kontinuerlig om vi tar

$f(-1,0,0) = 0$.

Svar: sätt $f(-1,0,0) = 0$.