Lektion 18

3.6

Funktionalmatrisen är

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos\psi & -3t\sin\psi \\ 2\sin\psi & 2t\cos\psi \end{pmatrix}$$

Funktionaldeterminanten är

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cos\psi & -3t\sin\psi \\ 2\sin\psi & 2t\cos\psi \end{vmatrix} = 6t\cos^2\psi + 6t\sin^2\psi = 6t$$

3.7

Funktionalmatrisen är

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(Det är faktiskt enkelt att se att funktionalmatrisen för en <u>linjär</u> avbildning är lika med avbildningens matris, t ex

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

, så A är både avbildningens matris och funktionalmatris.)

Funktionaldeterminanten är

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 7(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-3-2) =$$

$$= -35$$

Avbildningens matris är inverterbar $\Rightarrow$ avbildningen är inverterbar.

3.8

Vi måste lösa x och y ut från systemet.

$$\begin{cases} u = e^x + y \\ v = e^{-x} y \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = u - y \\ v = \dfrac{y}{u-y} \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = u - y \\ y = \dfrac{vu}{1+v} \end{cases} \iff$$

$(y > 0)$

$/ vu - vy = y /$

$$\begin{cases} e^x = u - \dfrac{vu}{1+v} \\ y = \dfrac{vu}{1+v} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln \dfrac{u}{1+v} \\ y = \dfrac{vu}{1+v} \end{cases}$$

– den inversa avbildningen

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ -e^{-x} y & e^{-x} \end{vmatrix} = 1 + e^{-x} y$$

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\cancel{1+v}} \cdot \frac{\cancel{1+v}}{u} & \frac{1+v}{u} \cdot \left(-\frac{u}{(1+v)^2}\right) \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u(1+v) - vu}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{u} & -\frac{1}{1+v} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(1+v)^2} + \frac{v}{(1+v)^2} = \frac{1+v}{(1+v)^2} = \frac{1}{1+v}.$$

Eftersom $v = e^{-x}y$ ser vi att

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \left(\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right)^{-1}.$$

(vilket är sant i övrigt, inte bara i den här exempeln.

3.9

a) Vi använder Inversa Funktionssatsen (se t ex boken s. 145):

Om avbildningens funktional determinant i $(x,y) = (1,0)$ inte är noll då har avbildningen en C^1-invers som är definierad i en motsv. omgivning av $(u,v) = (e,3)$.

Avbildningens matris är

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 1 \\ 2 & e^y \end{pmatrix}.$$

Om $x = 1, y = 0$ är detta

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial u}{\partial y}(1,0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

med funktionaldeterminanten $\begin{vmatrix} e & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = e - 2 \neq 0.$

Det är klart att $x = 1$ och $y = 0$.

Funktionalmatrisen av den inversa avbildningen i den motsvarande punkten $(u,v) = (e,3)$ är

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(e,3) & \frac{\partial x}{\partial v}(e,3) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(e,3) & \frac{\partial y}{\partial v}(e,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} e & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e-2} & \frac{-1}{e-2} \\ \frac{-2}{e-2} & \frac{e}{e-2} \end{pmatrix},$$

så

$$\boxed{\begin{aligned} x'_u(e,3) &= \frac{1}{e-2}, & x'_v(e,3) &= -\frac{1}{e-2}, \\ y'_u(e,3) &= -\frac{2}{e-2}, & y'_v(e,3) &= \frac{e}{e-2}. \end{aligned}}$$

b) I en allmän punkt (u, v) gäller

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^x & 1 \\ 2 & e^y \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{e^{x+y}-2} \cdot \begin{pmatrix} e^y & -1 \\ -2 & e^x \end{pmatrix}, \text{ så}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x'_u &= \frac{e^y}{e^{x+y}-2}, & x'_v &= \frac{-1}{e^{x+y}-2}, \\ y'_u &= \frac{-2}{e^{x+y}-2}, & y'_v &= \frac{e^x}{e^{x+y}-2} \end{aligned}}$$

6.10

a) $\iint_{D} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ där D är cirkelskivan med centrum i origo och radien 2.

Vi byter mot polära koordinater!

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

$$\iint_{D} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{\substack{0\le r\le 2 \\ 0\le\varphi\le 2\pi}} e^{r^2}\cdot\left|\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)}\right| dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 e^{r^2}\cdot r\,dr\right)d\varphi = \left[\frac{1}{2}\left(e^{r^2}\right)' = re^{r^2}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=2} d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}\right)\left[\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{1}{2}\left(e^4-1\right)\cdot 2\pi =$$

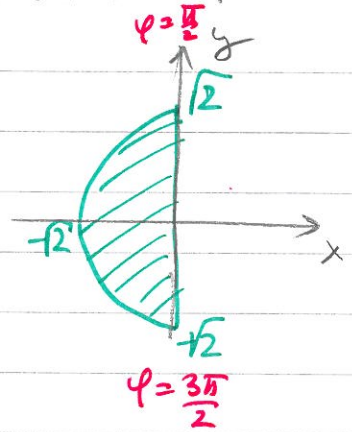
$$= \left(e^4-1\right)\pi.$$

b) Vi byter igen mot polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$0 \le r \le \sqrt{2}$

$\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$



$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = r \quad (\text{se } a)).$$

$$\iint_{D} \frac{x\,dx\,dy}{1+(x^2+y^2)^{3/2}} = \iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{2} \\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}}} \frac{r\cos\varphi}{1+(r^2)^{3/2}} \underbrace{\left|\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)}\right|}_{=r} dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2\cos\varphi}{1+r^3}\,dr \right) d\varphi =$$

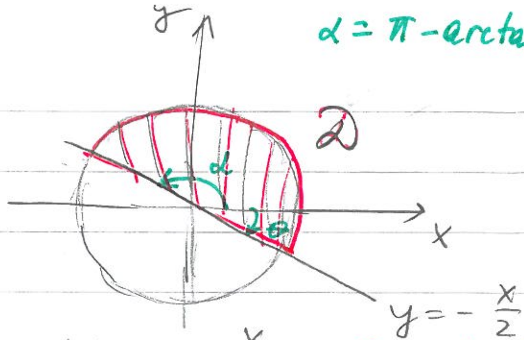
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{3} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{3r^2\,dr}{1+r^3}\,d\varphi = \left[(\ln(1+r^3))' = \frac{3r^2}{1+r^3} \right] =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{3} \cdot \Big[\ln(1+r^3)\Big]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{3} \ln(1+2\sqrt{2})\,d\varphi = \frac{\ln(1+2\sqrt{2})}{3} \Big[\sin\varphi\Big]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\ln(1+2\sqrt{2})}{3} \cdot (-1-1) = \frac{-2\ln(1+2\sqrt{2})}{3}$$

c) $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$



$\alpha = \pi - \arctan\frac{1}{2}$

$0 \le r \le 1$

$-\arctan\frac{1}{2} \le \varphi \le \pi - \arctan\frac{1}{2}$

$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = r$

$\mathcal{D} = \begin{cases} y \ge -\frac{x}{2} \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$

$\theta = \arctan(-\frac{1}{2}) = -\arctan\frac{1}{2}$

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+2y)\,dx\,dy = \iint_{\substack{0\le r\le 1 \\ -\arctan\frac{1}{2} \le \varphi \le \pi - \arctan\frac{1}{2}}} r(\cos\varphi + 2\sin\varphi)\left|\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)}\right| dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\arctan\frac{1}{2}}^{\pi-\arctan\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 r^2(\cos\varphi + 2\sin\varphi)\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\arctan\frac{1}{2}}^{\pi-\arctan\frac{1}{2}} (\cos\varphi + 2\sin\varphi)\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\arctan\frac{1}{2}}^{\pi-\arctan\frac{1}{2}} (\cos\varphi + 2\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\sin\varphi - 2\cos\varphi\Big]_{\varphi=-\arctan\frac{1}{2}}^{\varphi=\pi-\arctan\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\overbrace{\sin\left(\pi - \arctan\tfrac{1}{2}\right)}^{=\sin(\arctan\frac{1}{2})} - 2\overbrace{\cos\left(\pi - \arctan\tfrac{1}{2}\right)}^{=-\cos(\arctan\frac{1}{2})}$$

$$- \underbrace{\sin\left(-\arctan\tfrac{1}{2}\right)}_{=-\sin(\arctan\frac{1}{2})} + 2\underbrace{\cos\left(-\arctan\tfrac{1}{2}\right)}_{=\cos(\arctan\frac{1}{2})}\Big) = \otimes$$

OBS! $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \overset{\text{dela med } \cos^2 x}{\Rightarrow} \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}}$

Vi ser att $\cos(\arctan\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\sin(\arctan\frac{1}{2}) = \sqrt{1 - \cos^2 \ldots} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\otimes = \frac{1}{3}\left(2\sin\left(\arctan\frac{1}{2}\right) + 4\cos\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}}\right) = \frac{10}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

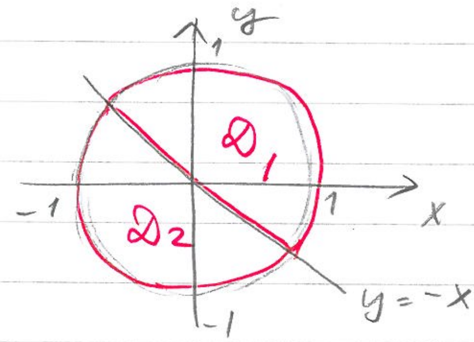
d) Observera att $|x+y| = \begin{cases} x+y & \text{då } x+y \geq 0 \\ -(x+y) & \text{då } x+y \leq 0 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} x+y & \text{då } y \geq -x \\ -x-y & \text{då } y \leq -x \end{cases}$$

Vi måste därför splittra D i två områden

$D_1 = \{y \geq -x,\ x^2+y^2 \leq 1\} =$

$= \{0 \leq r \leq 1,\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\}$



där $|x+y| = x+y$, och

$D_2 = \{y \leq -x,\ x^2+y^2 \leq 1\} = \{0 \leq r \leq 1,\ \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}\}$

där $|x+y| = -(x+y)$. I så fall

$$\iint_D |x+y|\,dx\,dy = \iint_{D_1} (x+y)\,dx\,dy - \iint_{D_2} (x+y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi - \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi\right) dr - \int_0^1 \left(\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi\right) dr =$$

$$= \int_0^1 r^2 \left[\sin\varphi - \cos\varphi\right]_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{3\pi}{4}} dr - \int_0^1 r^2 \left[\sin\varphi - \cos\varphi\right]_{\varphi=\frac{3\pi}{4}}^{\varphi=\frac{7\pi}{4}} dr$$

$$= \int_0^1 r^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dr - \int_0^1 r^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dr$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{\cancel{2}} \int_0^1 r^2 dr \cdot \cancel{2} = 4\sqrt{2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

6.11

a) Vi gör ett variabelbyte $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = 2x + y \end{cases}$, och $0 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$. I så fall

$$\iint_D (x+2y)\cos(2x+y)\,dx\,dy = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1}} u \cos v \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| du\,dv.$$

Observera att $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \left(\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right)^{-1} =$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^{-1} =$$

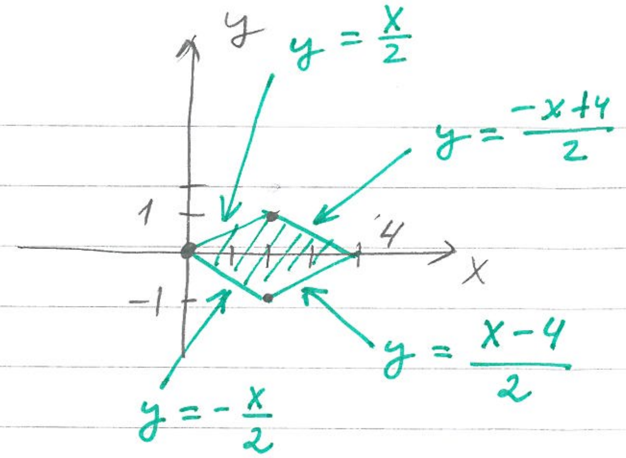
$$= (1-4)^{-1} = -\frac{1}{3}, \text{ så}$$

$$\iint_D (x+2y)\cos(2x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 u \cos v \left|-\frac{1}{3}\right| dv\right) du =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} u \cdot \left[\sin v\right]_{v=-1}^{v=1} du = \frac{1}{3} \int_0^1 u(\sin 1 - \underbrace{\sin(-1)}_{=-\sin 1}) du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2\sin 1 \cdot \left[\frac{u^2}{2}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{\sin 1}{3}$$

b) Området $\mathcal{D}$ kan beskrivas som



$$\begin{cases} \frac{x-4}{2} \le y \le \frac{x}{2} \\ -\frac{x}{2} \le y \le \frac{-x+4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-4 \le 2y \le x \\ -x \le 2y \le -x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le 2y-x \le 0 \\ 0 \le 2y+x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 \le x-2y \le 4 \\ 0 \le x+2y \le 4 \end{cases} \Rightarrow$$ det är rimligt att göra ett variabelbyte

$$\begin{cases} u = x-2y \\ v = x+2y \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le u \le 4 \\ 0 \le v \le 4 \end{matrix}, \quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

och $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{4}$.

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+2y)\exp(x-2y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\substack{0\le u\le 4 \\ 0 \le v \le 4}} v \exp u \cdot \underbrace{\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|}_{=\frac{1}{4}} \cdot du\,dv =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \left(\int_0^4 v\cdot e^u \, du\right) dv =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 v \left[e^u\right]_{u=0}^{u=4} dv = \frac{1}{4}\int_0^4 v\cdot(e^4-1)\,dv =$$

$$= \frac{e^4-1}{4}\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^{v=4} = 2\cdot(e^4-1)$$

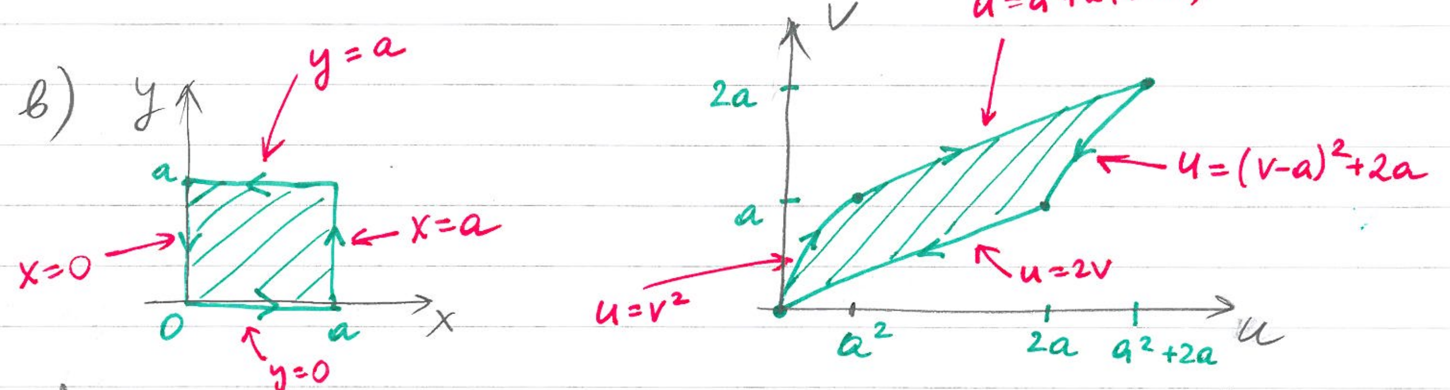
extra

3.10

a) $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x-2,$

i $(0,0)$ är detta $-2 \neq 0 \Rightarrow$ inversa funktionssatsen garanterar att inversen existerar och C^1 i ngn omg av $(0,0)$.

b)



Vi studerar hur avbildningen verkar på randen.

1) $y=0,\ 0 \le x \le a$ ger $\begin{cases} u = x^2 \\ v = x \end{cases},\ 0 \le x \le a \Rightarrow$

$$u = v^2,\quad 0 \le v \le a$$

Speciellt $(0,0) \to (0,0);\ (a,0) \to (a^2, a)$

2) $x=a,\ 0 \le y \le a$ ger $\begin{cases} u = a^2+2y \\ v = a+y \end{cases}\quad 0 \le y \le a \Rightarrow$

$$u = a^2 + 2(v-a),\quad a \le v \le 2a$$

Speciellt $(a,0) \to (a^2, a),\ (a,a) \to (a^2+2a, 2a)$

3) $y=a,\ 0 \le x \le a$ ger $\begin{cases} u = x^2+2a \\ v = x+a \end{cases}\quad 0 \le x \le a \Rightarrow$

$$u = (v-a)^2 + 2a \quad a \le v \le 2a$$

speciellt $(0,a) \to (2a, a)$; $(a,a) \to (a^2+2a, 2a)$

4) $x = 0,\ 0 \le y \le a$ ger $\begin{cases} u = 2y \\ v = y \end{cases}$ $0 \le y \le a \Rightarrow$

$$u = 2v, \quad 0 \le v \le a$$

Speciellt $(0,0) \to (0,0)$; $(0,a) \to (2a, a)$

c) Att funktionaldeterminanten är negativ i origo förklarar varför den positivt orienterade randen i xy-koordinater avbildas i den negativt orienterade randen i uv-koordinater (moturs → medurs).

Determinantens absolutbelopp är den lokala areaförstorningen, vilket betyder att

$$\frac{\text{Arean i } uv\text{-planet}}{\text{arean i } xy\text{-planet}} \to 2 \text{ då } a \to 0.$$