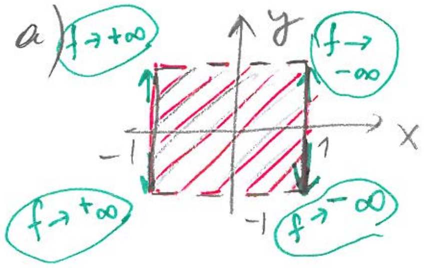
Lektion 12

4.1

Om f är en reellvärd kontinuerlig funktion och M är kompakt (= sluten och begränsad) då har f ett största och ett minsta värde på M.

a)



$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 < y < 1\}$ är begränsad, men inte sluten. Då är det inte säkert att en kontinuerlig funktion har sitt största/minsta värde där.

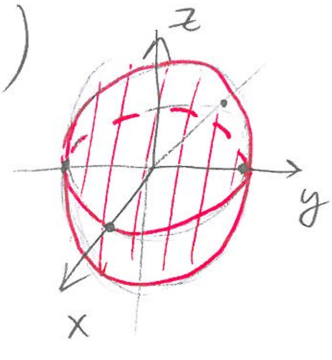
T ex $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2-1}$ är kontinuerlig i M, eftersom $y \neq \pm 1$ i M, men

$$\lim_{\substack{y \to 1^- \\ x=1}} f(x,y) = \lim_{y \to 1^-} \frac{1}{y^2-1} = -\infty \quad \text{och}$$

$$\lim_{\substack{y \to 1^- \\ x=-1}} f(x,y) = \lim_{y \to 1^-} \frac{-1}{y^2-1} = +\infty \quad \text{, så}$$

f har varken sitt största eller sitt minsta värde i M.

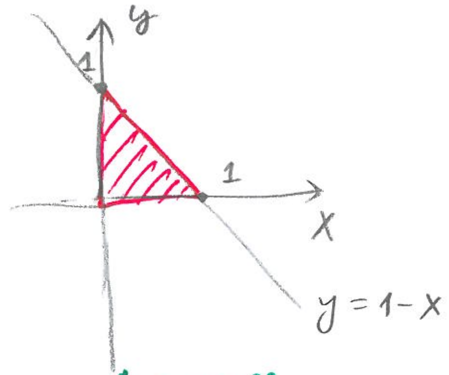
b)



M är ett klot – både sluten och begränsad.

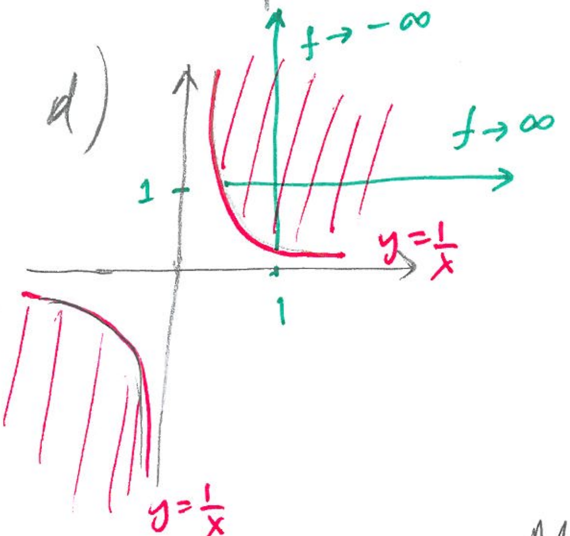
$\Rightarrow$ en reellvärd kontinuerlig funktion har sitt största/minsta värde där.

c)



$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1-x\}$ är både sluten och begränsad $\Rightarrow$ en reellvärd kont. funktion har säkert sitt största/minsta värde där.

d)



$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ y \geq \frac{1}{x}, x > 0\} \cup$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ y \leq \frac{1}{x},\ x < 0\}$

eftersom $yx \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{x} & \text{då } x > 0 \\ y \leq \frac{1}{x} & \text{då } x < 0. \end{cases}$

Mängden är inte begränsad $\Rightarrow$ det är inte säkert att en kontinuerlig reellvärd funktion antar sitt största/minsta värdet där.

T ex $f(x,y) = x^2 - y^2$ är kontinuerlig på M,

och $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y = 1}} f(x,y) = \lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - 1) = \infty$

$\lim\limits_{\substack{y \to \infty \\ x = 1}} f(x,y) = \lim\limits_{y \to \infty} (1 - y^2) = -\infty$

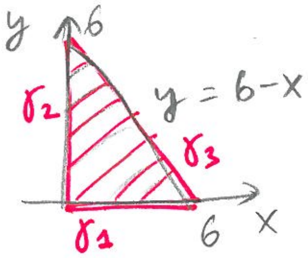
$\Rightarrow$ största/minsta värdet saknas!

4.2

a) Låt $f(x,y) = xy - x - y + 1$ – kontinuerlig

$D = \{x \geq 0, y \geq 0, y \leq 6 - x\}$ – kompakt $\Rightarrow$

$f: D \to \mathbb{R}$ har största och minsta värdet, vilket antas antingen i ngn av funktionens stationära punkter eller på randen.



1) Söker alla stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

ligger i D!

$(1, 1)$

$$f(1,1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

2) Söker funktionens största/minsta värde på randen. Randen består av tre delar:

$\gamma_1: \{y = 0, 0 \leq x \leq 6\}$

$f(x,y)$ längs γ_1 blir $g(x) = f(x, 0) = 1 - x$, $0 \leq x \leq 6$

Detta är en avtagande funktion $\Rightarrow$

$$g_{max} = g(0) = 1, \quad g_{min} = g(6) = -5$$

$\gamma_2: \{x = 0; 0 \leq y \leq 6\}$

$f(x,y)$ längs γ_2 blir $h(x) = f(0, y) = 1 - y$, $0 \leq y \leq 6$

Detta är en avtagande funktion $\Rightarrow$

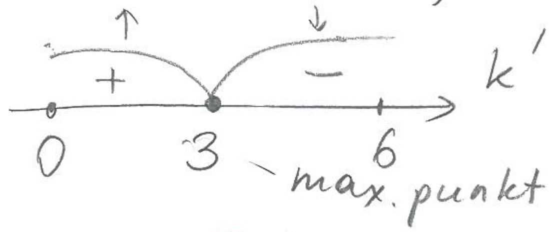
$$h_{max} = h(0) = 1 \quad h_{min} = h(6) = -5$$

$\gamma_3 : \{ y = 6 - x, \quad 0 \le x \le 6 \}$

$f(x,y)$ längs γ_3 blir $k(x) = f(x, 6-x) =$

$= x(6-x) - \cancel{x} - 6 + \cancel{x} + 1 = -x^2 + 6x - 5, \quad 0 \le x \le 6$

$k'(x) = -2x + 6$



$k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

$k(0) = -5$, $k(3) = -9 + 18 - 5 = 4$, $k(6) = -5$

värdet i en randpunkt — värdet i den punkt där derivatan är 0 — värdet i en randpunkt

Vi väljer nu det största/minsta värdet av alla de värden vi fick i 1) och 2).

Det största är 4, och det minsta är −5.

Både antas på randen:

$4 = k(3) = f(3,3)$

$-5 = \underbrace{k(6)}_{=g(6)} = \underbrace{k(0)}_{=h(6)} = f(6,0) = f(0,6)$

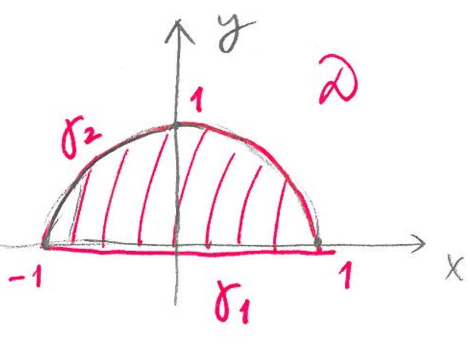
Svar $f_{max} = 4 = f(3,3)$

$f_{min} = -5 = f(6,0) = f(0,6).$

b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ – kontinuerlig

$D = \{ x^2 + y^2 \le 1, \ y \ge 0 \}$ – kompakt

$\Rightarrow f : D \to \mathbb{R}$ antar sitt största/minsta värdet.



1) söker alla stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \in D$$

$f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

2) undersöker randen:

randen består av två kurvor.

$\gamma_1 = \{y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$

$f(x,y)$ längs γ_1 blir

$g(x) = f(x,0) = x^2 - x, \quad -1 \leq x \leq 1.$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}, \quad g(-1) = 2, \quad g(1) = 0$

γ_2 är den övre halvan av cirkeln: $\{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$

γ_2 kan skrivas som $\{y = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$.
Längs γ_2 blir $f(x,y)$ en envariabelfunktion

$$h(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 + 2(1-x^2) - x =$$
$$= -x^2 - x + 2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$h'(x) = -2x - 1 \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$

$h(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{4}$

$h(-1) = -1 + 1 + 2 = 2$

$h(1) = -1 - 1 + 2 = 0$

Vi ser att $f_{max} = 2\frac{1}{4}$ och $f_{min} = -\frac{1}{4}$.

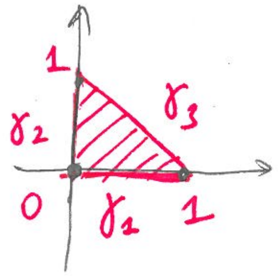
$f_{max} = 2\frac{1}{4} = h(-\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}, \sqrt{1-\frac{1}{4}}) = f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$f_{min} = -\frac{1}{4} = g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}, 0)$

Svar: $\quad f_{max} = 2\frac{1}{4} = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

$\qquad\quad f_{min} = -\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}, 0\right).$

c) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 4y^2 - 2y$ är kontinuerlig och området (se bild) är begränsad.



1) Söker stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 8y - 2 = 0 \end{cases} \oplus$$

$$6y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ - ligger i området!}$$

$$f\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{3}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

2) Undersöker rand.

$\gamma_1 = \{0 \le x \le 1, y = 0\}$

Längs γ_1 kan $f(x,y)$ skrivas som

$$g(x) = f(x, 0) = x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

$g \uparrow$ då $0 \le x \le 1 \Rightarrow g_{max} = 1, \quad g_{min} = 0.$

$\gamma_2 = \{0 \le y \le 1, x = 0\}$

Längs γ_2 kan $f(x,y)$ skrivas som

$$h(y) = f(0, y) = 4y^2 - 2y \qquad 0 \le y \le 1.$$

$h'(y) = 8y - 2 \Rightarrow h'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$.

$h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, $\quad h(0) = 0$, $\quad h(1) = 2$

$\gamma_3 = \{0 \leq x \leq 1, \quad y = 1 - x\}$

Längs γ_3 kan $f(x,y)$ skrivas som

$$k(x) = f(x, 1-x) = x^2 - 2x(1-x) + 4(1-x)^2 - 2(1-x) =$$
$$= x^2 - \cancel{2x} + 2x^2 + 4 - 8x + 4x^2 - 2 + \cancel{2x}$$
$$= 7x^2 - 8x + 2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$k'(x) = 14x - 8 \Rightarrow k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$

$k\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{16}{7} - \frac{32}{7} + 2 = \frac{-16 + 14}{7} = -\frac{2}{7}$

$k(0) = 2$

$k(1) = 1$

Det är klart att $-\frac{1}{3} < -\frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{3} > \frac{2}{7} \Leftrightarrow 7 > 6$ (sant)

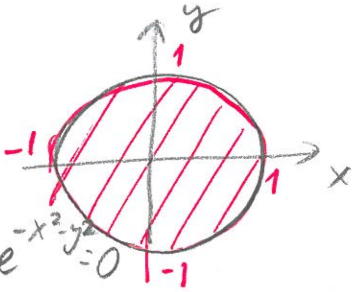
så $f_{min} = f\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.

$f_{max} = h(1) = k(0) = f(0, 1) = 2$

Svar: $f_{min} = f\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

$f_{max} = f(0; 1) = 2$

e) $f(x,y) = (x+2y)e^{-x^2-y^2}$ är kontinuerlig,
$D = \{x^2+y^2 \le 1\}$ är kompakt $\Rightarrow$ största/minsta värdet antas.



1) Stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x^2-y^2} - 2x(x+2y)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ 2e^{-x^2-y^2} - 2y(x+2y)e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{e^{-x^2-y^2}>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 - 2x(x+2y) = 0 & \Big| \times y \\ 2 - 2y(x+2y) = 0 & \Big| \times(-x) \end{cases} \; \oplus$$

$$y - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 1 - 2x(x+4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 10x^2 = 1 \end{cases}$$

Stationära punkter är $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ och $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.

både ligger i D.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \frac{5}{\sqrt{10}} e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2e}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{10}} e^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{5}{2e}}$$

2) Undersöker randen!

Randen kan skrivas som $\gamma_1 \cup \gamma_2$ där

$\gamma_1 = \{y = \sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 1\}$

$\gamma_2 = \{y = -\sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 1\}$

Längs γ_1 kan f skrivas som

$$g(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = (x + 2\sqrt{1-x^2})\, e^{-x^2-1+x^2} =$$

$$= (x+2\sqrt{1-x^2})\, e^{-1}, \quad \underline{-1 \le x \le 1}$$

$$g'(x) = \left(1 - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) e^{-1} \Rightarrow$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x^2 = 1-x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{1-\frac{1}{5}}\right) e^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right) e^{-1} = \sqrt{5}\, e^{-1}$$

$$g(-1) = -e^{-1}, \qquad g(1) = e^{-1}$$

Längs γ_2 kan f skrivas som

$$h(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2}) = (x - 2\sqrt{1-x^2})\, e^{-1}, \quad -1 \le x \le 1,$$

$$h'(x) = \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) e^{-1} \Rightarrow$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2x = -\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x^2 = 1-x^2 \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 1 \\ x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$h\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{1-\frac{1}{5}}\right) e^{-1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}}\right) e^{-1} = -\sqrt{5}\, e^{-1}$$

$$h(-1) = -e^{-1}, \qquad h(1) = e^{-1}$$

Det är klart att $\frac{\sqrt{5}}{e} > \frac{1}{e}$, och

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2e}} > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{e \cdot e}} = \frac{\sqrt{5}}{e}.$$

Vi ser att $f_{max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{\frac{5}{2e}}$

och $f_{min} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{\frac{5}{2e}}$.

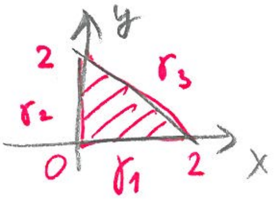
<u>Svar:</u> $f_{max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{\frac{5}{2e}}$

$f_{min} = -\sqrt{\frac{5}{2e}}$

f) $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$ är kontinuerlig,

$D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$ kompakt $\Rightarrow$

f_{max} och f_{min} antas.



1) <u>Stationära punkter:</u>

$e^{-x^2-y^2} \neq 0$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x^2-y^2} - 2x(x+y)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ e^{-x^2-y^2} - 2y(x+y)e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x(x+y) = 0 \\ 1 - 2y(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x^2 - 2xy = 0 \\ 1 - 2xy - 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{1} - 2x^2 - \cancel{2xy} = \cancel{1} - \cancel{2xy} - 2y^2 \\ 1 - 2xy - 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2x^2 + 2xy - 1 = 0 \end{cases}$$

$x = y$ ger $4x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2} = y$

$x = -y$ ger $\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} - 1 = 0$ – inga lösningar.

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ är alltså en stationär punkt, medan $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \notin D$.

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1e^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2) <u>Undersöker rand</u>

$\gamma_1 = \{y = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\}.$

Längs γ_1 kan $f(x,y)$ skrivas som

$g(x) = f(x,0) = xe^{-x^2}$, $\underline{0 \leq x \leq 2}$,

$g'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cancel{e^{-x^2}}(1-2x^2) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(kom ihåg $0 \leq x \leq 2$).

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$g(0) = 0,$$

$$g(2) = \frac{2}{e^4}$$

$\gamma_2 = \{x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2\}$

Längs γ_2 kan $f(x,y)$ skrivas som

$h(y) = f(0,y) = ye^{-y^2}$, $\underline{0 \leq y \leq 2} \Rightarrow$ samma funktion och intervall som för $\gamma_1 \Rightarrow$ "intressanta värden" är samma! $\frac{1}{\sqrt{2e}}, 0, \frac{2}{e^4}$.

$\gamma_3 = \{ y = 2 - x, \ 0 \le x \le 2 \}.$

Längs γ_3 kan $f(x,y)$ skrivas som

$$k(x) = (\cancel{x} + 2 - \cancel{x})\, e^{-x^2-(2-x)^2} = 2e^{-2x^2+4x-4}$$

$0 \le x \le 2$

$$k'(x) = 2(-4x+4)e^{-2x^2+4x-4} \Rightarrow$$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x+4=0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$k(1) = 2e^{-2+4-4} = \frac{2}{e^2}$$

$$k(0) = \frac{2}{e^4}, \quad k(2) = 2e^{-8+8-4} = \frac{2}{e^4}$$

Vi jämför värdena:

$$f_{min} = 0 = g(0) = f(0,0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{\sqrt{2e}} > \frac{2}{e^2} > \frac{2}{e^4} \Rightarrow f_{max} = \frac{1}{\sqrt{e}} = f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^2}{\sqrt{e}} > \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^{3/2} > \sqrt{2} \text{ - sant}$$

Svar: $f_{min} = 0 = f(0,0)$

$f_{max} = \frac{1}{\sqrt{e}} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

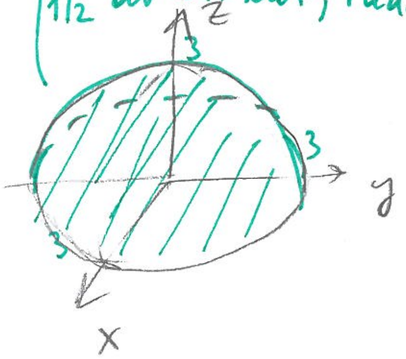
4.3

b) $f(x,y,z) = 3x + xy + z^2$ – kontinuerlig

$\mathcal{D} = \{x^2+y^2+z^2 \le 9,\ z \ge 0\}$ – kompakt $\Rightarrow$

största och minsta värdet antas.

1/2 av ett klot, rad. = 3



1) Stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + y = 0 \\ x = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

ger oss $(0,-3,0)$,

$f(0,-3,0) = 0$

2) Undersöker rand

$f(x,y,z) = 3x + xy + z^2 \to$ max/min på

$$R = \underbrace{\{x^2+y^2+z^2 = 9,\ z \ge 0\}}_{R_1} \cup \underbrace{\{x^2+y^2 \le 9,\ z = 0\}}_{R_2}$$

R_1: här har vi $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, $x^2+y^2 \le 9$, $z \ge 0$.

I så fall kan vi skriva $f(x,y,z)$ som

$h(x,y) = f(x,y,\sqrt{9-x^2-y^2}) =$

$= 3x + xy + 9 - x^2 - y^2$.

Vi söker hs största minsta värdet

på $M = \{x^2+y^2 \le 9\}$. Stat. punkter:

$$\begin{cases} h'_x = 0 \\ h'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + y - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3 - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$ – stationär punkt. Värdet

$$h(2,1) = 6 + 2 + 9 - 4 - 1 = 12$$

För att undersöka randen kan vi parametrisera $\{x^2 + y^2 = 9\}$ som

$$\gamma = \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Längs γ kan h skrivas som

$$g(t) = h(3\cos t, 3\sin t) =$$

$$= 9\cos t + 9\cos t \sin t \cancel{+9} \cancel{-9\cos^2 t} \cancel{-9\sin^2 t}$$

$$= 9\cos t + 9\cos t \sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$g'(t) = -9\sin t - 9\sin^2 t + 9\cos^2 t =$$

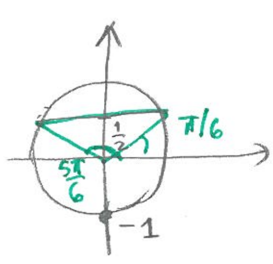
$$= -18\sin^2 t - 9\sin t + 9 =$$

$$= -9(2\sin^2 t + \sin t - 1) =$$

$$= -18(\sin t + 1)(\sin t - \tfrac{1}{2}).$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = -1 \text{ eller } \sin t = \tfrac{1}{2} \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{3\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{\pi}{6}, \quad t_3 = \frac{5\pi}{6}$$



De intressanta värdena är alltså

$g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left[\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{array}\right] = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$

$g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left[\begin{array}{l} \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{array}\right] = -\frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4} = -\frac{27\sqrt{3}}{4}$

$g(0) = 9$

$g(2\pi) = 9$

R_2: här är $z=0 \Rightarrow f(x,y,z)$ kan skrivas som

$k(x,y) = 3x + xy \,, \qquad x^2+y^2 \leq 9$

stat. punkter: $\begin{cases} k'_x = 0 \\ k'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$

ger $k(0,-3) = 0$

Rand Det är klart att R_2 har samma rand som R_1, och randen till R_1 har vi redan undersökt

Eftersom $\frac{27\sqrt{3}}{4} \approx \frac{27\cdot 1{,}7}{4} < \frac{28\cdot 1{,}7}{4} = \overbrace{7\cdot 1{,}7}^{=1{,}19} < 12$

ser vi att $f_{max} = 12 = h(2,1) = f(2,1,\sqrt{9-4-1})$

$f_{min} = -\frac{27\sqrt{3}}{4} = g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = h\left(3\cos\frac{5\pi}{6}, 3\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$

$= h\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{9-\frac{27}{4}-\frac{9}{4}}\right)$

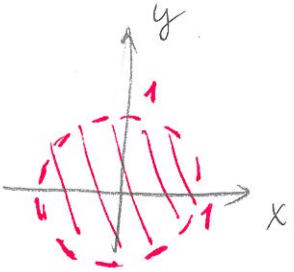
Svar $\quad f_{max} = 12 = f(2, 1, 2)$

$\quad\quad f_{min} = -\frac{27\sqrt{3}}{4} = f\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right).$

Extra

4.2 d $\quad f(x,y) = x^2+y^2+y \to$ max/min på

$\mathcal{D} = \{ x^2+y^2 < 1 \}.$



$\mathcal{D}$ är inte kompakt (ej sluten!) så f behöver inte anta sitt största/minsta värdet där. Vi kan dock använda ungefär samma metod som förut för att undersöka f.

1) Stationära punkter

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f\left(0; -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

2) Randundersökning

Randen är $\gamma = \{x^2+y^2 = 1\} \Rightarrow$ längs randen kan vi betrakta $f(x,y) = \underbrace{x^2+y^2}_{=1} + y$ som

$$g(y) = 1+y, \quad -1 \leq y \leq 1$$

$g(y)$ är strängt växande $\Rightarrow$ $g_{min} = g(-1) = 0$

$\quad\quad g_{max} = g(1) = 2$

Vi ser att $f_{min} = -\frac{1}{2} = f(0; -\frac{1}{2})$. Dock antar f inte sitt största värdet i $\mathcal{D}$,

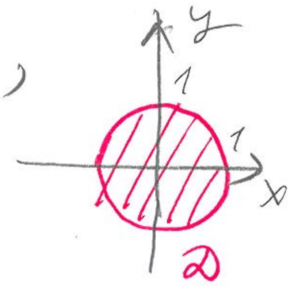
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 2$, vilket skulle bli funktionens största värde om $\mathcal{D}$ vore sluten, men $f(x,y)=2$ är aldrig uppfylld för $(x,y)\in\mathcal{D}$.

<u>Svar</u> $f_{min} = -\frac{1}{4} = f(0, -\frac{1}{2})$

f_{max} saknas.

g) $f(x,y) = x^2+2y^2+|x| \to$ max/min,

$\mathcal{D} = \{x^2+y^2 \leq 1\}$



OBS! f är inte deriverbar längs linjen $x=0$. Den här linjen måste undersökas separat.

1) <u>Stat. punkter</u> (vi antar nu att $|x|\neq 0$)

<u>$x>0$</u> $f(x,y) = x^2+2y^2+x$ och

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases} \text{ men } x>0 \text{ ?!}$$

<u>$x<0$</u> $f(x,y) = x^2+2y^2-x$ och

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases} \text{ men } x<0 \text{ ?!}$$

Inga stationära punkter!

2) <u>Linje $x=0$</u>

Kan parametriseras som $\gamma = \{x=0, -1\leq y \leq 1\}$.

Längs γ kan $f(x,y)$ skrivas som $g(y) = f(0,y) = 2y^2$

I så fall $g_{max} = 2 = g(\pm 1)$, $g_{min} = 0 = g(0)$

3) <u>Randundersökning</u>

Längs randen $\{y^2 + x^2 = 1\}$ är $y^2 = 1 - x^2$
så vi kan skriva $f(x,y)$ längs randen som

$$h(x) = x^2 + 2(1-x^2) + |x| = -x^2 + |x| + 2$$

$$\underline{-1 \leq x \leq 1}$$

$\underline{1 \geq x > 0}$: $h'(x) \overset{|x| = x}{=} -2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$$h\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 2\tfrac{1}{4}$$

$\underline{0 > x \geq -1}$: $h'(x) \overset{|x| = -x}{=} -2x - 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$$h\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 2\tfrac{1}{4}$$

dessutom är $h(1) = 2$, $h(-1) = 2$, $h(0) = 2$

Vi ser att $f_{min} = 0 = g(0) = f(0,0)$

$$f_{max} = 2\tfrac{1}{4} = h\left(\pm\tfrac{1}{2}\right) = \left[\begin{matrix} x = \pm\frac{1}{2} \\ \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \end{matrix}\right] =$$

$$= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= f\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

<u>Svar</u> $f_{min} = 0 = f(0,0)$

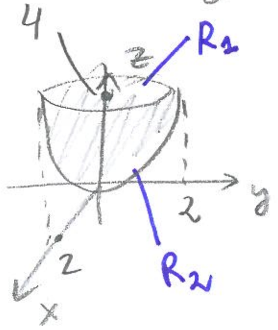
$$f_{max} = 2\tfrac{1}{4} = f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= f\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

4.3

a) $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 4z \to \max/\min$

$\mathcal{D} = \{x^2+y^2 \le z \le 4\}$



1) Stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y=0 \\ 2z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \in D.$$

$f(1,0,2) = 1-2+0+4-8 =$
$= -5$

2) Randundersökning

Rand består av två komponenter:

$R_1 = \{x^2+y^2 \le 4,\ z=4\}$

$R_2 = \{z = x^2+y^2,\ x^2+y^2 \le 4\}$

$R_1 = \{x^2+y^2 \le 4,\ z=4\}$

Här kan vi skriva $f(x,y,z)$ som

$g(x,y) \underset{z=4}{=} x^2 - 2x + y^2 \cancel{+16-16}$ $\qquad x^2+y^2 \le 4$

Stat. punkter $\begin{cases} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

$g(1,0) = 1-2+0 = -1$

Rand $\{x^2+y^2=4\} = \{y^2 = 4-x^2\} \Rightarrow$

Längs randen till R_1 kan vi skriva $g(x,y)$ som

$$h(x) \overset{y^2=4-x^2}{=} x^2-2x+4-x^2 = 4-2x \qquad \underline{-2 \le x \le 2}$$

$$h \downarrow \Rightarrow h_{max} = h(-2) = 8$$
$$h_{min} = h(2) = 0$$

$$\underline{R_2 = \{z = x^2+y^2,\ x^2+y^2 \le 4\}}$$

Längs R_2 är $y^2 = z - x^2 \Rightarrow f(x,y,z)$ kan skrivas som $k(z,x) = \cancel{x^2} - 2x + z - \cancel{x^2} +$

$$+z^2-4z =$$
$$= z^2-3z-2x$$

$$\underline{0 \le z \le 4,\quad -2 \le x \le 2}$$

<u>Stationära punkter</u>!

$$\begin{cases} k'_x = 0 \\ k'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 0 \\ 2z-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{inga stat. punkter!}$$

Randen till R_2 är samma som randen till R_1 och är alltså undersökt.

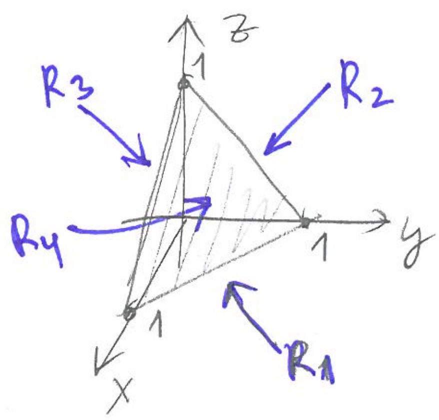
Vi ser att
$$f_{min} = -5 = f(1,0,2)$$
$$f_{max} = 8 = h(-2) = \left[\begin{matrix} x=-2 \\ y^2 = 4-x^2 = 0 \\ z = 4 \end{matrix}\right] =$$
$$= f(-2,0,4)$$

<u>Svar!</u> $f_{min} = -5 = f(1,0,2)$
$f_{max} = 8 = f(-2,0,4)$

4.3

c) $f(x,y,z) = (1-x)^3 + (1-y)^3 + (1-z)^3 \to \max/\min$

$\mathcal{D} = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$.



1) Stationära punkter!

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-x)^2 = 0 \\ 3(1-y)^2 = 0 \\ 3(1-z)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

men $(1,1,1) \notin \mathcal{D}$!

inga stationära punkter!

2) Randundersökning

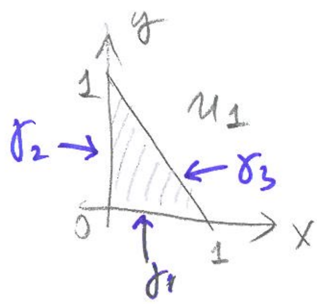
Rand består av 4 komponenter.

$R_1 = \{z = 0,\ x+y \leq 1\}$

$f(x,y,z)$ blir $h(x,y) = (1-x)^3 + (1-y)^3 + 1$

som ska undersökas på $\mathcal{U}_1 = \{x+y \leq 1\}$

Stat. punkter $\begin{cases} h'_x = 0 \\ h'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-x)^2 = 0 \\ 3(1-y)^2 = 0 \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ men $(1,1) \notin \mathcal{U}_1$

$\Rightarrow$ inga stat. punkter.

Rand: $\gamma_1 = \{0 \leq x \leq 1,\ y = 0\} \Rightarrow h$ blir

$g(x) = 2 + (1-x)^3$

$\Rightarrow g_{max} = 3 = g(0)$

$g_{min} = 2 = g(1)$

$\gamma_2 = \{0 \le y \le 1, \quad x = 0\} \Rightarrow h$ blir

$k(y) = 2 + (1-y)^3 \quad \downarrow \quad \Rightarrow \quad k_{max} = 3 = k(0)$

$k_{max} = 2 = k(1)$

$\gamma_3 = \{0 \le x \le 1, \quad y = 1 - x\} \Rightarrow h$ blir

$$\ell(x) = (1-x)^3 + x^3 + 1 = 2 - 3x + 3x^2$$

$0 \le x \le 1$

$\ell'(x) = -3 + 6x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\ell\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$

$\ell(0) = 2$

$\ell(1) = 2$

Vi får samma "intressanta" värden vid undersökning av

$R_2 = \{x = 0, \; y + z \le 1\}$ och $R_3 = \{y = 0, \; x + z \le 1\}$

Betrakta nu $R_4 = \{x + y + z = 1\} = \{z = 1 - x - y\}$

där $f(x, y, z)$ kan skrivas som

$$m(x, y) = (1-x)^3 + (1-y)^3 + (x+y)^3, \qquad x + y \le 1$$

Stationära punkter: $\begin{cases} m'_x = 0 \\ m'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(1-x)^2 + 3(x+y)^2 = 0 \\ 3(1-y)^2 - 3(x+y)^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 = (1-y)^2 \\ (1-y)^2 = (x+y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ antingen $1 - x = 1 - y \Leftrightarrow x = y \Rightarrow$

$(1-x)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x = -1 = y} \\ x = \frac{1}{3} = y \end{cases}$ passar inte!

eller $1 - x = y - 1 \Leftrightarrow x = 2 - y \Rightarrow$

$(1-y)^2 = 4 \Rightarrow y = -1$ eller $y = 3$

passar inte

$m\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{27} \cdot 3 = \frac{8}{9}$

Randen till R_4 ingår i $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ och behöver inte undersökas. Slutligen,

$$f_{max} = 3 = g(0) = h(0,0) = f(0,0,0).$$

$$f_{min} = \frac{8}{9} = m\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Svar: $f_{max} = 3 = f(0,0,0)$.

$f_{min} = \frac{8}{9} = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.