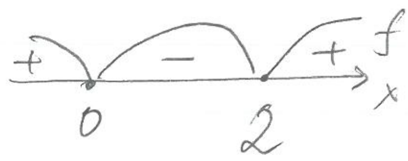
Lektion 9

$\boxed{P4}$ **15** a) $f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x =$

$= 3x(x-2)$



f är strängt avtagande då $x \in [0; 2]$.

b) $$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{3(x^2+1)}\right)' = \frac{\frac{3}{2\sqrt{x}}(x^2+1) - 6x\cdot\sqrt{x}}{9(x^2+1)^2} =$$

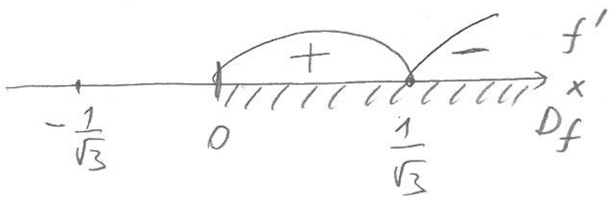
$$= \frac{3x^2 + 3 - 12x^2}{18\sqrt{x}(x^2+1)^2} =$$

OBS!
$D_f = [0; +\infty)$

$$= \frac{-9x^2+3}{18\sqrt{x}(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-\cancel{9}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}{2\,\cancel{18}\sqrt{x}(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$$



$\Rightarrow$ f är strängt avtagande då $x \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, -\infty)$

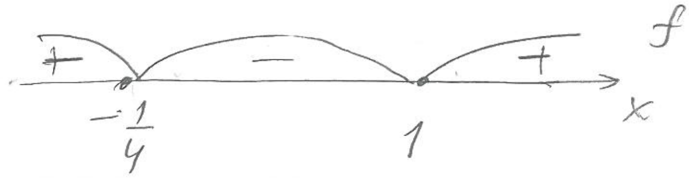
16 Beräknar $f'(x) = \left((3-4x)e^{-2x^2}\right)' =$

$= -4e^{-2x^2} - 4x(3-4x)e^{-2x^2} =$

$= e^{-2x^2}(16x^2 - 12x - 4) =$

$= 16e^{-2x^2}\left(x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) = 16e^{-2x^2}(x-1)(x+\frac{1}{4})$ | 1

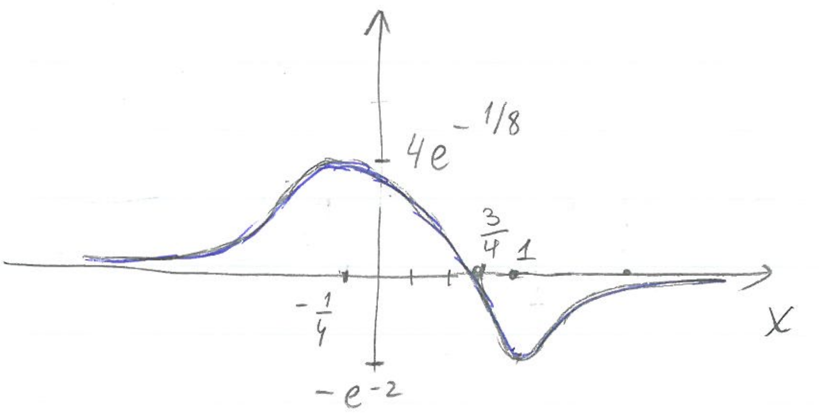
Vi ser att



$\Rightarrow$ $-\frac{1}{4}$ är lokal maximipunkt
1 är lokal minimipunkt ‖ !
f växer på $[-\infty; \frac{1}{4}] \cup [1; +\infty)$
f avtar på $[\frac{1}{4}; 1]$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(3-4x)}{e^{2x^2}} = 0^-.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(3-4x)}{e^{2x^2}} = 0^+.$$



$f(-\frac{1}{4}) = 4e^{-\frac{1}{8}}$

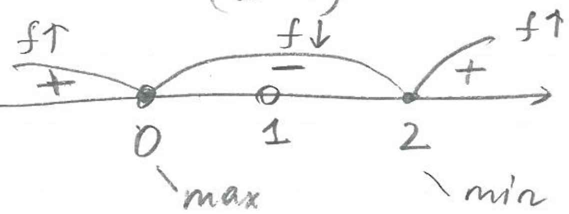
$f(1) = -e^{-2}$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Största värdet är $4e^{-1/8}$, Minsta värdet $-e^{-2}$.

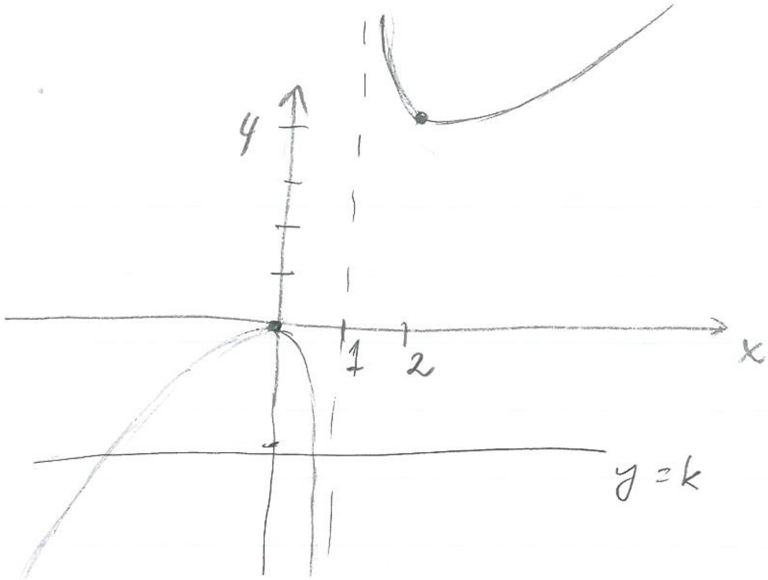
<u>18</u> Låt $f = \frac{x^2}{x-1}$. Vi skisserar först grafen.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot 1}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \overset{\to\infty}{x} \cdot \underset{\to 1}{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \overset{\to-\infty}{x} \underset{\to 1}{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)} = -\infty.$$



$f(0) = 0$

$f(2) = 4$

OBS: $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$

a) Värdemängden är $V_f = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

b) Olikheten $\frac{x^2}{x-1} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{(x-1)} \geq 0$ – detta gäller då $x > 1$.

c) $\frac{x^2}{x-1} = 5 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 5}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 - 5x + 5 = 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$

Eftersom $5^2 - 4 \cdot 5 = 5 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 5$ har två rötter och ingen av dem är $1 \Rightarrow$ $\frac{x^2}{x-1} = 5$ har två rötter.

d) Från grafen ser vi att (antal rötter = antal punkter där linjen $y = k$ skär grafen $y = \frac{x^2}{x-1}$):

* vi har två rötter då $k \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.
* vi har en rot då $k = 0$ eller $k = 4$.
* vi har inga rötter då $0 < k < 4$.

19 $f'(x) = \left(x\ln x - \frac{(\ln x)^2}{4} - x\right)' = \ln x + \cancel{1} - \frac{2\ln x}{4x} - \cancel{1} =$

$= \ln x\left(1 - \frac{1}{2x}\right) = \ln x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x}\right) =$

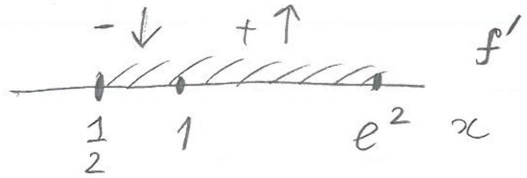
$= \ln x \cdot \frac{x - \frac{1}{2}}{x}$.

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ eller $x = 1$

Derivatan existerar inte i $x = 0$

$D_f = (0; +\infty)$.

Måste kontrollera!
$x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = 2$.



$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{\left(\ln\frac{1}{2}\right)^2}{4} - \frac{1}{2} =$

$= -\ln\sqrt{2} - (\ln\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} < 0$

$f(1) = -1$

$f(e^2) = 2e^2 - 1 - e^2 = e^2 - 1 > 0$

det största av dem är funktionens största
det minsta av dem är fs minsta.

Från funktionens beteende ser vi att
$f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$ och $f(1) < f(e^2)$.

$\Rightarrow$ $f(1) = -1$ – minsta

$f(e^2) > f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(e^2) = e^2 - 1$ – största.

$\underline{17}$ a) Lokala max och minimipunkter kan inträffa inte bara i punkter där derivatan är 0, men också där den är inte definierad.

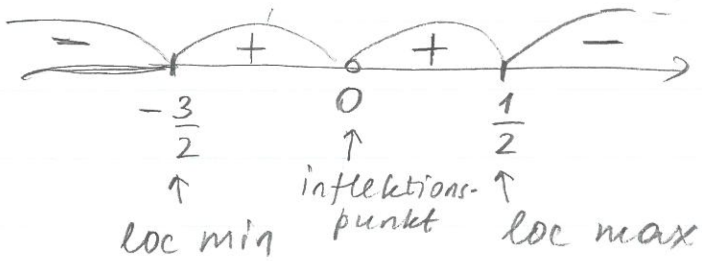
$$f(x) = \begin{cases} (2x+1)e^{-x} & x \geq 0 \\ (2x+1)e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

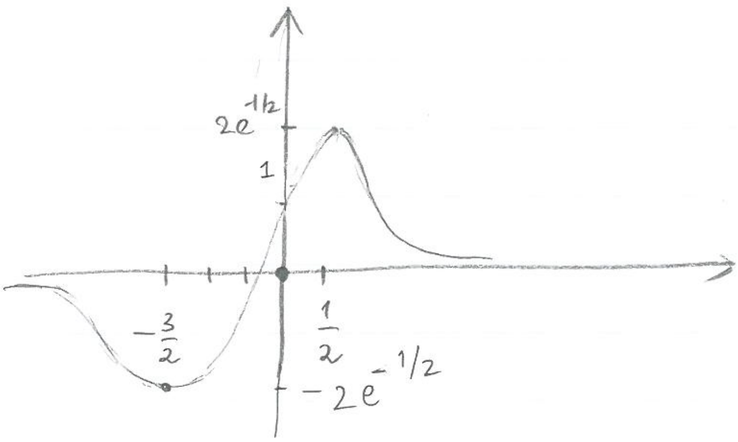
OBS! $|x|$ är inte deriverbar i 0!!

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} = (-2x+1)e^{-x} & x > 0 \\ 2e^{x} + (2x+1)e^{x} = (2x+3)e^{x} & x < 0 \end{cases} \quad x \neq 0$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{(2h+1)e^{-|h|} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(e^{-|h|} - 1)}{h} + \underset{\to 1}{2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{-|h|} - 1}{|h|} \cdot \frac{|h|}{h} + 2 \right) - \text{existerar ej!}$$





$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (2x+1)e^{-x} = 0^{+}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (2x+1)e^{x} = 0^{-}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -2e^{-3/2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-1/2}$$

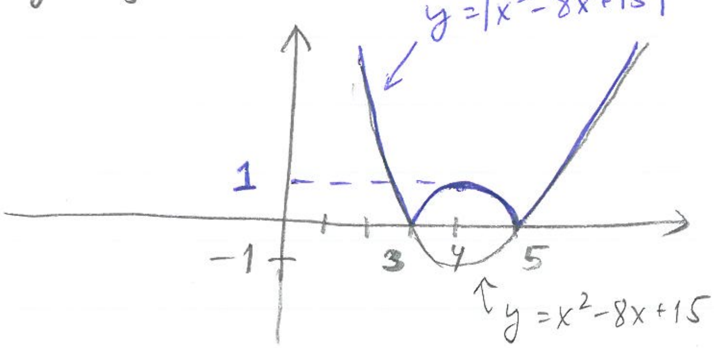
$$f(0) = 1$$

Lokal maximipunkt: $x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-1/2}$

Lokal minimipunkt: $x = -\frac{3}{2}$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -2e^{-3/2}$

b) $f(x) = |x^2 - 8x + 15| = |(x-5)(x-3)|$

Den här funktionen inte är deriverbar i $x=3$ och $x=5$ (varför?). Vi ritar grafen:



Betrakta först $g(x) = x^2 - 8x + 15$ som har loc min i $x = \frac{8}{2} = 4$,

$g(4) = 16 - 32 + 15 = -1$

Ritar nu $y = |g(x)|$: allt som är under x-axeln speglas upp!

Från grafen syns det tydligt att $x=4$ är lokal maximipunkt, medan $x=3$ och $x=5$ är lokala minimipunkter.

Alternativt kan man använda att

$(x-5)(x-3)$: $\quad + \quad 3 \quad - \quad 5 \quad + \quad x \Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-8x+15 & x \le 3 \\ -x^2+8x-15 & 3 < x < 5 \\ x^2-8x+15, & x \ge 5 \end{cases}$$

och göra en vanlig undersökning.

Extra

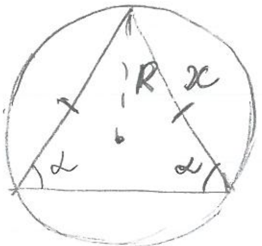
$\boxed{P4}$ 21 Eftersom funktionen är strängt växande och deriverbar, existerar inversen och i $b = f(a)$ gäller

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Eftersom $f(1) = 2$, så

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$$

22



För en sida x gäller att

$$\frac{x}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow x = 2R\sin\alpha.$$

Vidare är arean

$$A = \frac{1}{2}x^2\sin(180^\circ - 2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\sin 2\alpha = \frac{1}{2}4R^2\sin^2\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= 4R^2\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

Detta kan betraktas som $A(\alpha)$ och största och minsta värdet kan sökas:

$$A'(\alpha) = 12R^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 4R^2\sin^4\alpha =$$

$$= 4R^2\sin^2\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$A'(\alpha) = 0 \Rightarrow 4R^2\sin^2\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$

$$0 < \alpha < \pi/2$$

Så $3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \Rightarrow \tan^2\alpha = 3 \Rightarrow$
$\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$

$A(0) = 0$

$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ – "minsta"

men då är det ingen triangel...

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4R^2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 \text{ – största}$$

Största: $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

Minsta: saknas.

26 a) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{begr.}} = 0.$$

Om f hade lokal maximipunkt i $x=0$, då skulle $f(x) \geq f(0) = 0$ vara uppfylld för alla x "nära" 0.

Men för $x_n = -\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ gäller

$$f(x_n) = \frac{4}{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^2} \underbrace{\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right)}_{= -1} =$$

$$= -\frac{4}{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^2} < 0.$$

$x_n \to 0$, så det går alltid att hitta x_n nära noll.

Om f hade lokal minimipunkt i $x=0$, då skulle $f(x) \leq f(0) = 0$ vara uppfylld för alla x "nära" 0.

Men för $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ gäller

$$f(y_n) = \frac{4}{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}_{=1} = \frac{4}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} > 0$$

$y_n \to 0$, så det går att hitta x_n nära noll.

Observera att för $z_n = -\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$ gäller

$$f(z_n) = z_n^2 \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{z_n}}_{=1} > 0$$

~~och för $w_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$ gäller $f(w_n) < 0$~~

Eftersom $z_n < 0 < y_n$ och $f(z_n) > 0$ är
$f(y_n) > 0$

$x = 0$ Inte en terraspunkt (om den var, så skulle $z < 0 < y$ innebära antingen $f(z) \leq f(0) \leq f(y)$ eller $f(z) \geq f(0) \geq f(y)$).

b) $f(x) = 2x^2 + x^2 \sin\frac{1}{x}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(2x + x\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Eftersom för alla x gäller

$$f(x) = 2x^2 + x^2 \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\geq -1} \geq 2x^2 - x^2 = x^2 \geq 0 = f(0)$$

så är $x = 0$ ett (globalt) min.