Lektion 5: Standarta gränsvärden

$\frac{\sin x}{x} \to 1$ då $x \to 0$

$\frac{\tan x}{x} \to 1$ då $x \to 0$

$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ då $x \to 0$

$\frac{e^x - 1}{x} \to 1$ då $x \to 0$

$(1+x)^{1/x} \to e$ då $x \to 0$.

$\frac{\arctan x}{x} \to 1$ då $x \to 0$

P3

15 a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\underbrace{x \to 0}_{\Rightarrow 2x \to 0}} \overbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}^{\to 1} \cdot 2 = \boxed{2}$.

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \lim_{x \to 0} \sin 5x \cdot \frac{1}{\sin 4x} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{1}{4x}$

$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{\to 1 \text{ då } 5x \to 0} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}_{\to 1 \text{ då } 4x \to 0}} \cdot \frac{5\cancel{x}}{4\cancel{x}} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1 \text{ då } 3x \to 0} \cdot 3\cancel{x} \cdot \underbrace{\frac{7x}{\sin 7x}}_{\to 1 \text{ då } 7x \to 0} \cdot \frac{1}{7\cancel{x}}$

$= \boxed{\frac{3}{7}}$.

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} \overbrace{\sin x}^{\text{begränsad}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = \boxed{0}$

OBS! ∞! ... 1

16 a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{-x}\cdot(-x)\cdot\frac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot\frac{1}{3x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} \cdot \frac{1}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}} \cdot \frac{-\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

$\to 1$ då $x\to 0$ $\quad$ $\to 1$ då $3x \to 0$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{(x-1)(x+1)} = \left[\begin{matrix} y = x-1 \\ x\to 1 \Rightarrow y\to 0 \\ x = 1+y \end{matrix}\right]$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y\cdot(y+2)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \cdot \frac{1}{y+2} =$

$\to 1$ $\quad$ $\to \frac{1}{2}$

$= \boxed{\frac{1}{2}}$

20 a) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(x+1) - \ln x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) =$

$= \left[\begin{matrix} y = \frac{1}{x},\ x = \frac{1}{y} \\ x\to\infty \Leftrightarrow y\to 0 \end{matrix}\right] = \lim\limits_{y\to 0} \frac{1}{y}\ln(1+y) =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \boxed{1}$

b) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \left[\begin{matrix} x-\pi = y \Rightarrow x = y+\pi \\ x\to\pi \Rightarrow y\to 0 \end{matrix}\right] =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin(y+\pi)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} -\frac{\sin y}{y} = \boxed{-1}$

$\to 1$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\ln x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{2\ln x} =$

$= \begin{bmatrix} y = x-1 \Rightarrow x = y+1 \\ x\to 1 \Leftrightarrow y \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)}{2\ln(y+1)} =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{2\ln(y+1)} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0} \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\cdot\dfrac{1}{\ln(y+1)}$

$= -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0} \underbrace{\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}y}}_{\to 1 \text{ då } \left(\frac{\pi}{2}y\right)\to 0}\cdot\dfrac{\pi}{2}\cancel{y}\cdot\underbrace{\dfrac{y}{\ln(y+1)}}_{\to 1}\cdot\dfrac{1}{\cancel{y}} = \boxed{-\dfrac{\pi}{4}}$

21 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2+x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\left(x^2+x^3\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{x^2(1+x)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}\ 1}{\cancel{x^2}\underbrace{(1+x)}_{\to 1}\underbrace{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}_{\to 2}}$

$= \boxed{\dfrac{1}{2}}$

B3

29 a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x+2x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x(1+2x^2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}\cdot\dfrac{1}{\underbrace{1+2x^2}_{\to 1}} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\sin 5x}{5x}}_{\to 1 \text{ då } 5x\to 0}\cdot 5 = \boxed{5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 3x}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\dfrac{e^{\sin 3x}-1}{\sin 3x}}_{\to 1 \text{ dá } \sin 3x \to 0} \cdot \dfrac{\sin 3x}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\dfrac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1 \text{ dá } 3x \to 0} \cdot 3 = \boxed{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^3}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\dfrac{\sin x^3}{x^3}}_{\to 1 \text{ dá } x^3 \to 0} \cdot \dfrac{x^3}{\sin^3 x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^3 = \dfrac{1}{\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}\right)^3} = \boxed{1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (1+3x^2)^{1/x} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3x^2}}}_{\to e \text{ dá } 3x^2 \to 0}{}^{\cdot 3x^2 \cdot \frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} 3x} = e^0 = \boxed{1}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\arctan 7x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7x}{\arctan 7x} \cdot \dfrac{2\cancel{x}}{7\cancel{x}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\underbrace{\dfrac{\arctan 7x}{7x}}_{\to 1 \text{ dá } 7x \to 0}} \cdot \dfrac{2}{7} = \boxed{\dfrac{2}{7}}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x \sin 2x}-1}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\dfrac{e^{x \sin 2x}-1}{x \sin 2x}}_{\to 1 \text{ dá } x \sin 2x \to 0} \cdot \dfrac{x \sin 2x}{\tan^2 x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin 2x}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x \cancel{\sin x} \cos x}{\dfrac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cos^2 x}} =$

$= \lim \dfrac{2x \cos^3 x}{\sin x} = \lim \underbrace{\dfrac{x}{\sin x}}_{\to 1 \text{ dá } x \to 0} \cdot 2\cos^3 x = \boxed{2}$ $\boxed{4}$

30 Funktionen f är uppenbarligen kontinuerlig i alla punkter förutom 0 och π.
För att den ska bli kontinuerlig i 0 måste

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (Ax+B) \text{, där}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}_{\to 1 \text{ då } 4x\to 0} \cdot 4 = 4 \text{, och}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (Ax+B) = B,$$ eftersom i så fall

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$ existerar och är lika med $\underbrace{B}_{\lim_{x\to 0^+}} = \underbrace{4}_{\lim_{x\to 0^-}} = f(0)$.

$$\Rightarrow \boxed{B = 4}$$

Likadant kan vi undersöka $x = \pi$:

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} (Ax+B) = A\pi + B = A\pi + 4$$

$$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} \cos x = -1$$

så $A\pi + 4 = -1$ och $\boxed{A = -\frac{5}{\pi}}$

Extra uppgifter

$\boxed{P3}$ 19 Bestäm A och B så att

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - Ax - B\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - Ax - B\right) = [\overset{\text{då } A>0}{\infty} - \infty],$$

så vi multiplicerar med konjugatet:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - (Ax+B)\right)\left(\sqrt{x^2+x} + (Ax+B)\right)}{\sqrt{x^2+x} + Ax + B} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-(Ax+B)^2}{\sqrt{x^2+x} + Ax + B} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-A^2x^2-2AxB-B^2}{\sqrt{x^2+x} + Ax + B} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+x} \overset{x>0}{=} \\ = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})} = \\ = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \end{array}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(1-A^2)x^2+(1-2AB)x-B^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}} + Ax + B} = \otimes$$

Vi ser att om $1-A^2 \neq 0$ så $(1-A^2)x^2$ är en dominant term så att

$$\otimes = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left((1-A^2) + \overset{\to 0}{(1-2AB)\frac{1}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{B^2}{x^2}}\right)}{x\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}_{\to 1} + A + \underbrace{\frac{B}{x}}_{\to 0}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-A^2)}{\underbrace{1+A}_{A\neq -1,\text{ då } 1-A^2\neq 0}} = \infty, \text{ eftersom } \frac{1-A^2}{1+A} \text{ är ett tal} \neq 0.$$

Det betyder att $1-A^2=0$, annars får vi aldrig 0 som gränsvärdet. Vi har två möjligheter:

$\boxed{A=1}$: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x} - x - B\right) = \ldots =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(1-2B)x-B^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}} + x + B} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left((1-2B) - \overset{\to 0}{\frac{B^2}{x}}\right)}{x\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} + 1 + \underbrace{\frac{B}{x}}_{\to 0}\right)} =$$

$$= \frac{1-2B}{2}.$$

Om detta ska bli 0, så $1-2B=0 \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{2}}$

$\boxed{A=-1}$: $\lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\infty} \underbrace{+x}_{+\infty} - B\right) = \infty$

oavset vad B är.

Svar: $A=+1$, $B=\frac{1}{2}$.

$\boxed{B3}$ 48

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}} =$$

multiplicerar båda uttryck med konjugatet

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}+x}{\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{x^2(1+\frac{1}{x})}+\sqrt{x^2-x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}+2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{4x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} \cdot \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}{4\cancel{x}}$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$