Lektion 21

$\boxed{P6}$ **14**

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \otimes$

$$\int \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \left[\begin{array}{l} 2-\cos x = t \\ dt = \sin x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| =$$

$$= \ln(2-\cos x) \Rightarrow$$

$$\otimes = \lim_{b\to\infty}\Big[\ln(2-\cos x)\Big]_0^b = \lim_{b\to\infty}\Big(\ln(2-\cos b) - \underbrace{\ln(2-1)}_{=0}\Big)$$

$= \lim_{b\to\infty} \ln(2-\cos b)$ – existerar inte, då $\cos b$ saknar gränsvärdet då $b \to \infty$.

Svar: integralen är divergent.

b) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \otimes$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[\begin{array}{l} \ln x = t \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2} = -t^{-1} = \frac{-1}{\ln x}$$

$$\otimes = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^b = \lim_{b\to\infty}\Big[\underbrace{-\frac{1}{\ln b}}_{\to 0} + 1\Big] =$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

15 a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}$ är en generaliserad integral,

eftersom $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(x+1)} = \infty \Rightarrow$

vi betraktar denna integral som

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+x^2} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x+x^2} = \otimes$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \\ A=1,\ B=-1 \text{ (handpåläggning)} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| \Rightarrow$$

$$\otimes = \lim_{c\to 0^+} \Big[\ln|x| - \ln|x+1| \Big]_c^1 =$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \Big(0 - \ln 2 - \underbrace{\ln c}_{\to -\infty} + \underbrace{\ln(c+1)}_{\to 0} \Big) = +\infty$$

Svar: integralen är divergent

b) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2} = \left[\begin{array}{l} \text{det finns inga} \\ \text{punkter där } \frac{1}{x+x^2} \\ \text{är obegränsad då } x \ge 1 \end{array} \right] =$$ se ovan för partialbråksuppdelning och primitiv funkt.

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln|x| - \ln|x+1| \Big]_1^b = \lim_{b\to\infty} \Big(\ln|b| - \ln|b+1| - \underbrace{\ln 1}_{=0} + \ln 2 \Big) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\ln\frac{b}{b+1} + \ln 2 \right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\ln \underbrace{\frac{\cancel{b}\,1}{\cancel{b}(1+\frac{1}{b})}}_{\to 1} + \ln 2 \right) = \ln 2$$

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x+x^2}$ är generaliserad både i 0 och ∞, så intervallet måste delas i två delar:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}}_{\text{divergent, se a)}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}}_{\text{konvergent } = \ln 2 \text{ se b)}} \text{ – divergent.}$$

d) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ är generaliserad endast i $\infty \Rightarrow$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^3+1} = \left[\begin{matrix}\text{se lektion} \\ 19,\ P6:97\end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\overbrace{\frac{1}{3}\ln|x+1|}^{=\frac{1}{6}\ln|x+1|^2} - \frac{1}{6}\ln|4x^2-4x+4| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big]_0^b =$$

$\infty \qquad \infty$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+2x+1}{4(x^2-x+1)} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{1}{6}\ln\frac{\cancel{b^2}(1+\frac{2}{b}+\frac{1}{b^2})}{4\cancel{b^2}(1-\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2})} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2b-1}{\sqrt{3}}$$

$$- \frac{1}{6}\ln\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}} \Big) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{6}\ln\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \cancel{\frac{1}{6}\ln\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi}{\cancel{6}3} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}}}$$

$\boxed{B6}$ $\underline{\underline{24}}$

a) Integralen är generaliserad endast i ∞. Beräknar först den primitiva funktionen

$$\int (\underset{\downarrow}{2x-1}) \underset{\uparrow}{e^{-2x}}\,dx = (2x-1)\frac{e^{-2x}}{-2} - \int \cancel{2}\cdot\frac{e^{-2x}}{-\cancel{2}}\,dx$$

$$= (-x+\tfrac{1}{2})e^{-2x} + \int e^{-2x}\,dx = (-x+\tfrac{1}{2})e^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2} \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty (2x-1)e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \ldots dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\Big[(-b+\tfrac{1}{2})e^{-2b} - \frac{e^{-2b}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big] =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(-\underbrace{\frac{b}{e^{2b}}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{2e^{2b}}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{2e^{2b}}}_{\to 0}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=0$$

b) Integralen är generaliserad endast i ∞.
Beräknar först en primitiv funktion.

$$\int x^{-3}\ln(x+1)\,dx = -\frac{x^{-2}}{2}\ln(x+1)+\int\frac{1}{2x^2(x+1)}\,dx = ⊗$$

Part. bråkuppdelar $\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$

$$\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$(A+C)x^2+(A+B)x+B=1 \Rightarrow \begin{matrix}B=1\\A+B=0\\A+C=0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}B=1\\A=-1\\C=1\end{matrix}$$

$$⊗=-\frac{\ln(x+1)}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=-\frac{\ln(x+1)}{2x^2}-\frac{\ln|x|}{2}-\frac{x^{-1}}{2}+\frac{\ln|x+1|}{2}$$

och

$$\int_1^\infty\frac{\ln(x+1)}{x^3}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{\ln(x+1)}{x^3}\,dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\overbrace{\frac{\ln(b+1)}{2b^2}}^{\to 0}-\frac{\ln b}{2}-\overbrace{\frac{1}{2b}}^{\to 0}+\frac{\ln(b+1)}{2}\right.$$

$$\left.+\cancel{\frac{\ln 2}{2}}+\cancel{\frac{\ln 2}{2}}+\frac{1}{2}-\cancel{\ln 2}\right)$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b+1}{b}\right)+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(1+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

4

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+3+2e^{-x}} = \int_0^\infty \frac{e^x\,dx}{\underbrace{e^{2x}+3e^x+2}_{>0}}$ – generaliserad endast i ∞.

Vi gör ett variabelbyte $e^x = t \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+3e^x+2} = \int \frac{dt}{t^2+3t+2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} \\ \Rightarrow A = 1,\ B = -1 \\ \text{(handpåläggning)} \end{array}\right] =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right) dt = \ln|t+1| - \ln|t+2| =$$

$$= \ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| = \ln\left|\frac{e^x+1}{e^x+2}\right| \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+3+2e^{-x}} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x+3+2e^{-x}} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{e^b+1}{e^b+2}\right| - \ln\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{\ln\left|\frac{1+\frac{1}{e^b}}{1+\frac{2}{e^b}}\right|}_{\to 0} - \ln\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\ln\frac{2}{3}}}$$

$\underline{\underline{25}}$ a) $\int_0^1 x^{-\alpha} dx$ är generaliserad i $0 \Rightarrow$

$$\int_0^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^{-\alpha} dx.$$

När $\alpha \neq 1$ detta är $\lim_{c\to 0^+} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_c^1 =$

$= \lim_{c\to 0^+} \frac{1-c^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ – existerar och ändlig då $1-\alpha > 0$

$\Leftrightarrow \alpha < 1.$

När $\alpha = 1$ detta är $\lim_{c\to 0^+} [\ln x]_c^1 = \infty.$

Svar: då $\alpha < 1$ konvergerar integralen.

b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ är generaliserad i ∞. Om $\alpha \neq 1 \Rightarrow$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b x^{-\alpha}\,dx\right) = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

existerar och ändlig då $1-\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1$

Kollar vad händer då $\alpha = 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

Svar då $\alpha > 1$ konvergerar integralen.

Extra $\boxed{B6}$

33 Kroppen som inte attraheras av jorden kommer att befinna sig oändligt långt borta från jorden (idealiserad situation, vi antar att universom innehåller endast jorden och kroppen).

Arbetet som måste uträttas för att frigöra kroppen är då $A(\infty)$:

$$\int_R^{R+\infty} \frac{mgR^2}{x^2}\,dx = \int_R^{\infty} \frac{mgR^2}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_R^{b} \frac{mgR^2}{x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{mgR^2}{x}\right]_{x=R}^{x=b} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{mgR^2}{R} - \underbrace{\frac{mgR^2}{b}}_{\to 0}\right) =$$

$$= \underline{\underline{mgR}}.$$

<u>32</u> Vi vet att $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. I så fall

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\overset{=|a|^2}{a^2}(x-b)^2}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-(|a|(x-b))^2}\,dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-(|a|(x-b))^2}\,dx}_{=I_2}$$

Både I_1 och I_2 är endast generaliserade vid oändligheten, och båda är divergenta då $a=0$, så vi antar fr o m nu att $a \neq 0$.

$$I_2 = \left[\begin{array}{l} |a|(x-b)=t \\ |a|\,dx = dt \\ -|a|b \le t < \infty \end{array}\right] = \int_{-|a|b}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{|a|} =$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-|a|b}^{0} e^{-t^2}\,dt + \underbrace{\frac{1}{|a|}\cdot\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2|a|}}$$

$$I_1 = \left[\begin{array}{l} x = -t \\ dx = -dt \\ 0 \le t < \infty \end{array}\right] = -\int_{\infty}^{0} e^{-(|a|(-t-b))^2} dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(|a|(t+b))^2} dt = \left[\begin{array}{l} u = |a|(t+b) \\ du = |a| dt \\ |a|b \le u < \infty \end{array}\right] =$$

$$= \int_{|a|b}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{|a|} = \underbrace{\frac{1}{|a|} \int_{0}^{\infty} e^{-u^2} du}_{= \frac{\sqrt{\pi}}{2|a|}} - \frac{1}{|a|} \int_{0}^{|a|b} e^{-u^2} du$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} + \frac{1}{|a|} \left(\int_{-|a|b}^{0} e^{-t^2} dt - \int_{0}^{|a|b} e^{-u^2} du \right)$$

Eftersom $\int_{-|a|b}^{0} e^{-t^2} dt = \left[\begin{array}{l} u = -t \\ du = -dt \\ u \in (|a|b, 0) \end{array}\right] =$

$$= -\int_{|a|b}^{0} e^{-u^2} du = \int_{0}^{|a|b} e^{-u^2} du,$$

så $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(x-b)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}$, då $a \neq 0$.

När $a = 0$ divergerar integralen.

<u>Svar</u>: $\frac{\sqrt{\pi}}{|a|}$, $a \neq 0$

int. divergerar då $a = 0$