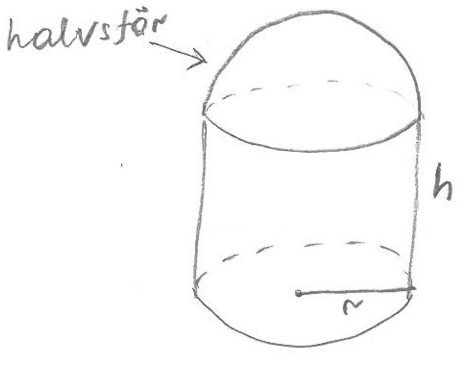
Lektion 10

P4 **20**



Låt radien av cirkeln i botten vara r, och låt väggens höjd vara h. I så fall

$$A = \underbrace{h \cdot 2\pi r}_{\text{cylinderns area}} + \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}}\pi r^2}_{\text{area av en halvsfär}}, \text{ så}$$

Vi kan bestämma höjden:

$$h = \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{A}{2\pi r} - r$$

Tältets volym är

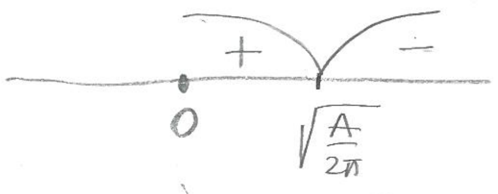
$$V(r) = \underbrace{h \cdot \pi r^2}_{\text{cylinderns volym}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}_{\text{halvsfärens volym}} =$$

$$= \pi r^2 \left(\frac{A}{2\pi r} - r \right) + \frac{2}{3}\pi r^3 =$$

$$= \frac{Ar}{2} - \pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{Ar}{2} - \frac{1}{3}\pi r^3.$$

Söker den största möjliga volymen!

$$V'(r) = \frac{A}{2} - \pi r^2 = -\pi\left(r^2 - \frac{A}{2\pi}\right) = -\pi\left(r - \sqrt{\frac{A}{2\pi}}\right)\left(r + \sqrt{\frac{A}{2\pi}}\right)$$



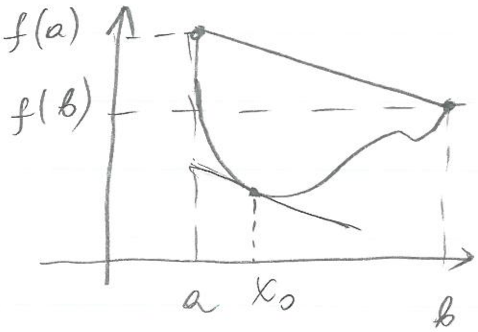
När $r > 0$, så är $\sqrt{\frac{A}{2\pi}}$ en 'global' maximipunkt $\Rightarrow$ den största volymen

är $V\left(\sqrt{\frac{A}{2\pi}}\right) = \frac{A\sqrt{A}}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{3}\frac{\cancel{\pi} A}{2\cancel{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{A}{2\pi}} = \frac{\cancel{2}}{3} \frac{A\sqrt{A}}{2\sqrt{2\pi}} = \boxed{\frac{A\sqrt{A}}{3\sqrt{2\pi}}} \cdot$ [illegible]

23 Medelvärdessatsen för derivator:

Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och deriverbar på $]a, b[$ (åtminstone). Då finns det minst en punkt $x_0 \in]a, b[$ där

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$



Det finns en punkt $x_0 \in]a, b[$ där tangentens lutning är samma som lutningen av den räta linjen genom punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$ på funktionens graf.

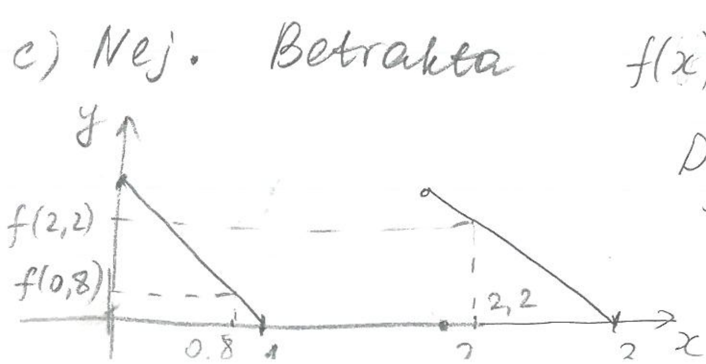
24

a) Vi säger att f är strängt avtagande på mängden $M \subset D_f$ om

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{för varje } x_1 < x_2 \text{ i } M.$$

b) Sant, se sats 4.8.

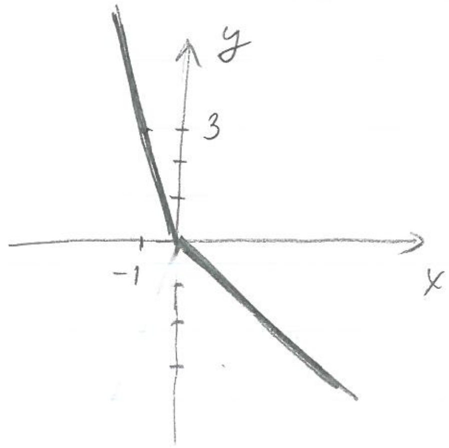
c) Nej. Betrakta $f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 3-x & 2 \le x \le 3 \end{cases}$



$D_f = [0; 1] \cup [2; 3]$

$f'(x) = -1$ i hela D_f men $f(2,2) > f(0,8)$?!

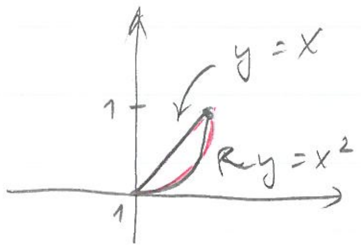
d) $f(x) = \begin{cases} x - 2x & x \geq 0 \\ -x - 2x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases}$



Den är avtagande, trots att det inte går att använda Sats 4.8, då f inte är deriverbar i $x = 0$ $(f_-'(0) = -3 \neq f_+'(0) = -1)$.

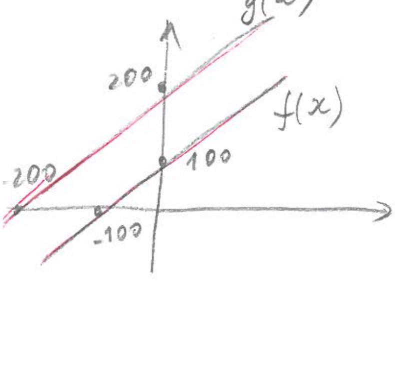
25 a) $f \geq g \Rightarrow f' \geq g'$?

Inte sant: Låt $f(x) = x$ och $g(x) = x^2$.
$x \geq x^2$ då $0 \leq x \leq 1$.
men är
$(x)' \geq (x^2)'$ uppfylld?



$1 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$
när $x > \frac{1}{2}$ så
$(x)' < (x^2)'$ ...

b) $f' \geq g' \Rightarrow f \geq g$?



Inte sant! $f(x) = x + 100$ och $g(x) = x + 200$.

$f'(x) = 1 = g'(x)$ men $g(x) > f(x)$ överallt...

26 a) Vi betraktar $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \arctan x$.
Att lösa olikheten $\Leftrightarrow$ hitta alla x s a $f(x) \geq 0$
Observera att $f(0) = 0$. Vidare gäller det att

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{1}-x^2-\cancel{1}-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2}{1+x^2} < 0$$

för alla $x \neq 0 \Rightarrow f$ är strängt avtagande då $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Det betyder att:

$x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$
$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
$x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0$

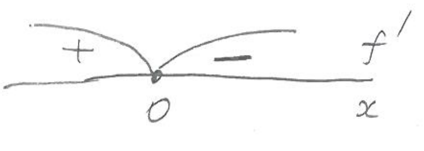
detta ger oss lösningen.

<u>Svar</u>: $x \leq 0$.

c) Vi betraktar $f(x) = e^x - 1 - xe^x$.
Att lösa olikheten betyder att hitta alla x så att $f(x) < 0$.

Observera att $f(0) = 1 - 1 - 0 = 0$, och
$f'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$.

Vi ser att $f'(x) > 0$ då $x < 0$,
$f'(0) = 0$
$f'(x) < 0$ då $x > 0$



Vi ser att $x=0$ är en global maximum, dvs $f(x) < f(0)=0$ för alla $x \neq 0$.

<u>Svar</u>: $x \neq 0$

$\boxed{B4}$ <u>27</u> a) Medelvärdesatsen säger att
$\cos x - \cos y = \cos'(x_0)(x-y)$
för någon $x_0 \in \,]x, y[$
(här antog vi att $x<y$. Om $y<x$ så
$\cos y - \cos x = \cos'(x_0)(y-x)$ för någon
$x^0 \in \,]y, x[\iff \cos x - \cos y = \cos'(x_0)(x-y)$.

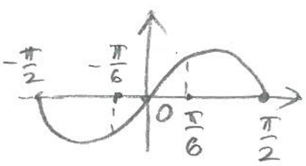
Dvs för varje $x, y \in \mathbb{R}$ finns det x_0 mellan dem så att $\cos x - \cos y = \underbrace{\cos'(x_0)}_{-\sin(x_0)}(x-y)$.

Vi kan ta absolutbeloppet av den här identiten: $|\cos x - \cos y| = \underbrace{|\sin(x_0)|}_{\leq 1}|x-y| \leq |x-y|$
för alla $x, y \in \mathbb{R}$

b) Vi utgår ifrån

$|\cos x - \cos y| = |\sin(x_0)||x-y|$

men nu är $x, y \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.



$\Rightarrow \sin x_0 \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

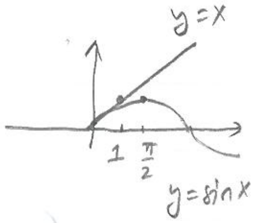
$\Rightarrow |\sin x_0| \leq \frac{1}{2}$. Slutligen,

$|\cos x - \cos y| \leq \frac{1}{2}|x-y|$ för $|x|, |y| \leq \frac{\pi}{6}$.

Extra

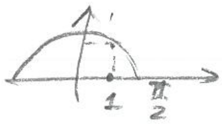
$\boxed{P4}$ **28** Betrakta $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$.

$f'(x) = -\sin x + x$ och frågan är: är detta > 0 då $x > 0$?



När $x \geq 1$ så $x - \sin x > 1 - 1 > 0 \Rightarrow$ $f'(x) > 0$ för $x \geq 1$, så vi ska bara betrakta $x \in (0; 1)$.

Låt $g(x) = x - \sin x \Rightarrow g(0) = 0$, och $g'(x) = 1 - \cos x$. När $x \in (0; 1)$ så $\cos x \in (\cos 1; 1) \Rightarrow$



$$\begin{cases} g'(x) > 0 & \text{för } x \in (0; 1) \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow g(x) > 0$ då $x \in (0; 1)$
$\Rightarrow f'(x) > 0$ då $x \in (0; 1)$

Det betyder att $f'(x) > 0$ för alla $x > 0 \Rightarrow$ funktionen är strängt växande.

29 $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$, $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$.

$$f'(x) = \cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} -$$

har detta samma tecken för alla $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$?

Vi skriver om detta som

$$f'(x) = \cos x - \sin x + \frac{\overbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}^{=(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}}{\cos^2 x \sin^2 x} =$$

$$= (\cos x - \sin x)\left(1 - \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x \sin^2 x}\right) =$$

$$= (\cos x - \sin x)\left(\frac{\cos^2 x \sin^2 x - \sin x - \cos x}{\cos^2 x \sin^2 x}\right)$$

Här $\dfrac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} > 0$ då $x \in (0; \frac{\pi}{4})$

Och $\cos x - \sin x = \begin{bmatrix} \text{se t.ex.} \\ \text{boken s 104} \end{bmatrix} =$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \text{ då } \frac{\pi}{4} - x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

när $x \in (0; \frac{\pi}{4})$.

Det återstår att bestämma tecken på

$$\cos^2 x \sin^2 x - \sin x - \cos x =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - (\sin x + \cos x) = \begin{bmatrix} \text{gör samma} \\ \text{sak med} \\ \sin x + \cos x \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

När $x \in (0; \frac{\pi}{4}) \Rightarrow 2x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin 2x \in (0; 1)$
och $\frac{1}{4}\sin 2x \in (0; \frac{1}{4})$, medan

$$x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in$$

$$\in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right) \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in (1; \sqrt{2})$$

Vi ser att $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{4}\sin 2x$

då $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$$\cos^2 x \sin^2 x - \sin x - \cos x = \frac{1}{4}\sin 2x - \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Det betyder att

$$f'(x) = \underbrace{(\cos x - \sin x)}_{>0} \cdot \frac{\overbrace{(\cos^2 x \sin^2 x - \sin x - \cos x)}^{<0}}{\underbrace{\cos^2 x \sin^2 x}_{>0}} < 0.$$

<u>Funktionen avtar.</u>